

# Um Estudo sobre Interações entre Espécies Espacialmente Distribuídas em um Modelo do Tipo Lotka-Volterra

Graciele P. Silveira<sup>1</sup>

DFQM/UFSCar, Sorocaba, SP

Raphael O. Garcia<sup>2</sup>

DCA/UNIFESP, Osasco, SP

**Resumo.** A modelagem matemática, aliada a métodos numéricos e técnicas computacionais, constitui-se numa alternativa para se explorar problemas distintos inclusive biológicos. O objetivo desta pesquisa foi estudar as interações entre populações de presas e predadores, em um ambiente no qual ocorrem deslocamentos e/ou espalhamentos dos indivíduos. Para tanto, um modelo do tipo Lotka-Volterra foi considerado, dispondo de termos difusivos e advectivos. Simulações de cenários foram realizadas, a partir da implementação de métodos numéricos na linguagem Python e os resultados revelaram que essa abordagem foi adequada e pode auxiliar na compreensão do fenômeno, assim como na elaboração de estratégias para lidar com determinadas consequências advindas de diferentes fatores, dentre estes as mudanças climáticas.

**Palavras-chave.** Equações Diferenciais Parciais, Métodos Numéricos, Dinâmica de Populações

## 1 Introdução

As mudanças climáticas constituem-se numa emergência global, que requer um esforço conjunto dos países por meio de ações coordenadas e cooperação. De acordo com a Organização das Nações Unidas [3], os padrões climáticos vêm sendo alterados ao longo do tempo, causando perturbações no equilíbrio da natureza, o que representa muitos riscos para os seres humanos e todas as outras formas de vida na Terra. Tais mudanças ocorrem principalmente em razão das atividades humanas que liberam excessivamente gases de efeito estufa.

Dentre as consequências enfrentadas em virtude das mudanças climáticas estão secas intensas, escassez de água, incêndios severos, aumento do nível do mar, inundações, derretimento do gelo polar, tempestades catastróficas e declínio da biodiversidade. Em decorrência disso, comunidades inteiras de pessoas e animais precisam migrar em busca de novos locais para sobrevivência. Outros fatores muito preocupantes são as transformações de comportamento, reprodução e até no tamanho de várias espécies de animais e plantas.

O propósito deste trabalho foi investigar o impacto de termos advectivos e difusivos na dinâmica populacional de presas e predadores, descritos por um modelo do tipo Lotka-Volterra [2], cujas populações estão distribuídas espacialmente em diferentes localidades.

## 2 Modelo Matemático

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

---

<sup>1</sup>graciele@ufscar.br

<sup>2</sup>rogarcia@unifesp.br

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla P_1 = b_1 \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right) + \alpha P_1 - \beta P_1 P_2 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla P_2 = b_2 \left( \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right) - \gamma P_2 + \delta P_1 P_2 \end{cases}, \quad (1)$$

em que  $P_1 = P_1(x, y, t)$  é a distribuição da população de presas em um ambiente no qual há condições suficientes para o crescimento;  $P_2 = P_2(x, y, t)$  é a distribuição da população de predadores que se alimentam de  $P_1$  e se beneficiam do encontro entre  $P_1$  e  $P_2$ , representado por  $P_1 P_2$ , limitando o crescimento de  $P_1$ . Os coeficientes advectivos  $\vec{u} = (u_x, u_y)$  e  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  descrevem, respectivamente, o deslocamento das populações no domínio espacial e os coeficientes difusivos  $b_1$  e  $b_2$  o espalhamento das populações. O parâmetro  $\alpha$  é a taxa de crescimento das presas na ausência de predadores,  $\beta$  é a taxa de mortes no encontro de  $P_1$  e  $P_2$ ,  $\gamma$  é a taxa de mortalidade dos predadores e  $\delta$  é a taxa com que o alimento influencia no crescimento de  $P_2$ .

Há pelo menos dois motivos para se estudar cenários possíveis gerados pelo sistema (1). O primeiro deles é investigar situações práticas, adicionando características de mobilidade espacial de populações em problemas clássicos de ecologia e o outro é modelar matematicamente deslocamentos populacionais relacionados às características climáticas do ambiente [1].

As discretizações das equações diferenciais foram realizadas via esquemas de diferenças finitas, a saber, o método *Upwind* para o termo advectivo, um método de diferenças finitas centrado para o termo difusivo e um método de diferenças finitas avançado para a derivada temporal [4]. Os códigos próprios foram elaborados em linguagem Python.

Testes computacionais foram implementados, supondo por exemplo um domínio espacial  $(x, y) \in [0, 20] \times [0, 20]$ , com uma malha de  $60 \times 60$  subintervalos e um domínio temporal  $t \in [0, 30]$ , com 600 subintervalos, isto é,  $\Delta x = 1/3$ ,  $\Delta y = 1/3$  e  $\Delta t = 0,05$ . Tais escolhas satisfazem os critérios de estabilidade de Courant, Friedrichs e Lewy (CFL) e o critério do termo difusivo [4], ou seja,

$$\beta_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \beta_2 \frac{\Delta t}{\Delta y^2} < \frac{1}{2}. \quad (2)$$

### 3 Simulações e Resultados

Para os coeficientes relacionados à interação entre as espécies foram adotados os valores  $\alpha = 0,4$ ,  $\beta = 0,8$ ,  $\gamma = 0,1$  e  $\delta = 0,8$ . Além disso, sejam as condições iniciais dadas por

$$P_1(x, y, 0) = e^{-2(x-12)^2 - 2(y-12)^2} \quad \text{e} \quad P_2(x, y, 0) = e^{-2(x-8)^2 - 2(y-8)^2}, \quad (3)$$

com  $\vec{u} = (-0,1, -0,1)$  e  $\vec{v} = (0,2, 0,2)$ , tomando como base valores da literatura [1].

Dessa forma, a configuração inicial de cada população está representada na Figura 1, cuja coloração entre verde e amarelo representa os predadores e a coloração entre azul e vermelho as presas. Em todas as figuras, a única diferença entre os gráficos à esquerda e à direita, é o ângulo de rotação para facilitar a visualização das populações.

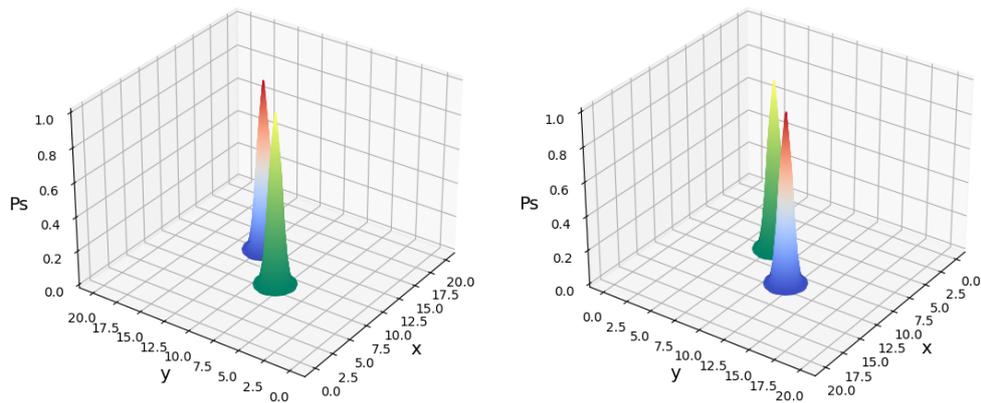


Figura 1: Condições iniciais das populações de presas (coloração entre azul e vermelho) e predadores (coloração entre verde e amarelo). Fonte: Os autores.

### 3.1 Cenário 1

Neste primeiro cenário, o objetivo foi estudar a dinâmica de interações entre as populações, supondo que as espécies vão se encontrar por meio da influência dos termos advectivos, que representam os deslocamentos. Isto é, considerou-se os termos difusivos nulos, ou seja,  $b_1 = b_2 = 0$ .

A evolução temporal para  $t = 2$  consta na Figura 2. Note que a população de presas aumentou a quantidade de indivíduos, enquanto que a população de predadores diminuiu, uma vez que ainda não há um contato direto entre as duas espécies. Dessa forma, as presas se reproduzem sem interferência dos predadores e os predadores morrem por não terem alcançado e se alimentado das presas.

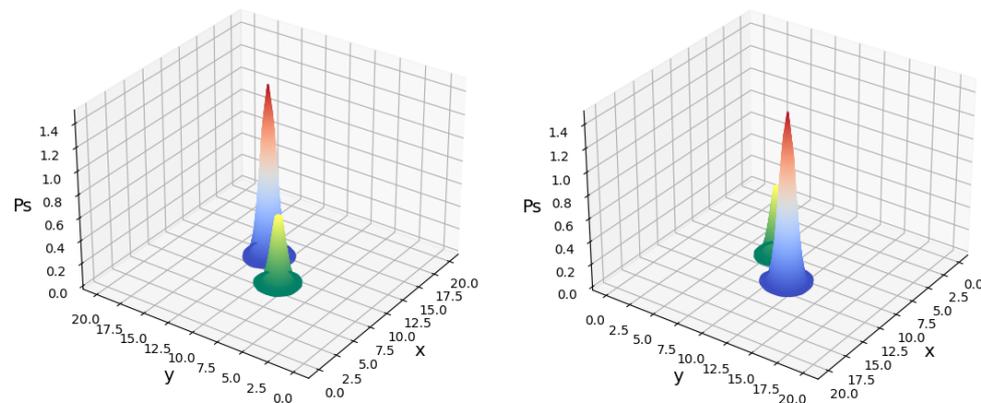


Figura 2: Evolução temporal das populações de presas e predadores para  $t = 2$ . Fonte: Os autores.

No tempo  $t = 8$ , ver Figura 3, os poucos sobreviventes predadores conseguem alcançar as presas e então, em  $t = 10$ , conferir Figura 4, percebe-se o crescimento da população de predadores e a diminuição na quantidade de presas, devido a esse encontro.

A parcela da população de presas que conseguiu evitar o contato com os predadores, passa a ser responsável por aumentar o seu grupo, enquanto que o pico da população de predadores entra em declínio, em razão da falta de interações com uma quantidade suficiente de presas, para manter os predadores. Por outro lado, como na cauda da distribuição de predadores há poucos indivíduos, a população de presas volta a se recuperar. Isso é observado na Figura 5.

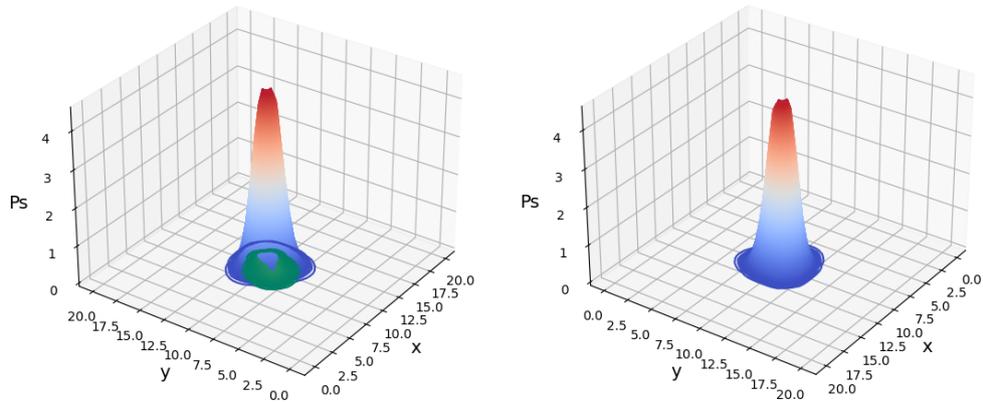


Figura 3: Evolução temporal das populações de presas e predadores para  $t = 8$ . Fonte: Os autores.

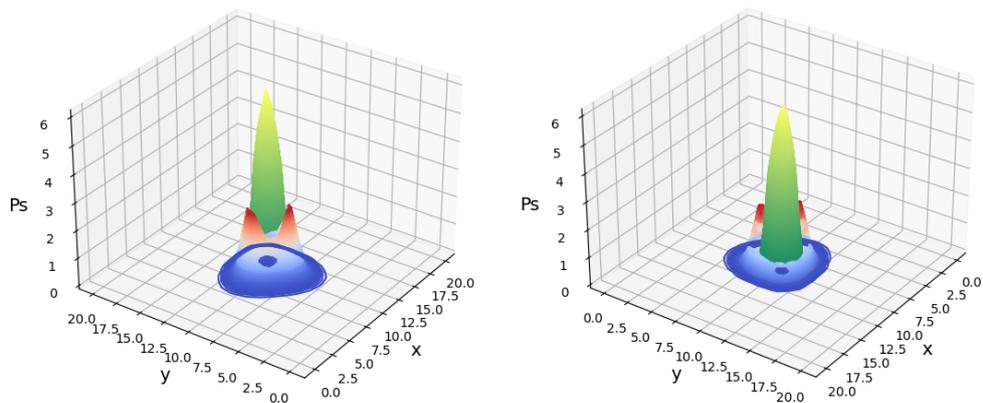


Figura 4: Evolução temporal das populações de presas e predadores para  $t = 10$ . Fonte: Os autores.

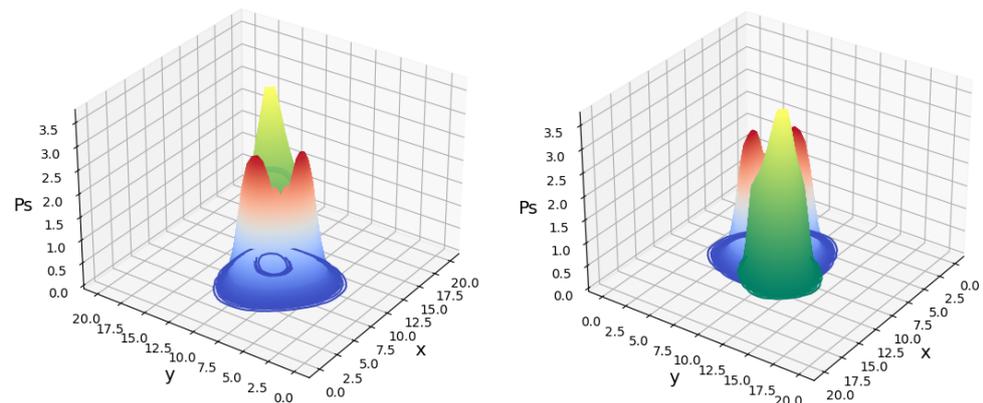


Figura 5: Evolução temporal das populações de presas e predadores para  $t = 14$ . Fonte: Os autores.

No tempo  $t = 18$ , a população de presas continua a aumentar e o pico de predadores passa a diminuir, conforme gráficos da Figura 6. A fuga das presas, seguindo na diagonal do domínio, faz com que o pico de presas cresça e os predadores que conseguiram acompanhar tal deslocamento, conseguem novamente aumentar o pico dos predadores, ver Figura 7. No entanto, a cauda da distribuição de presas faz com que o pico de predadores fique mais largo e a dinâmica atinge a vizinhança do canto  $(0,0)$  do domínio.

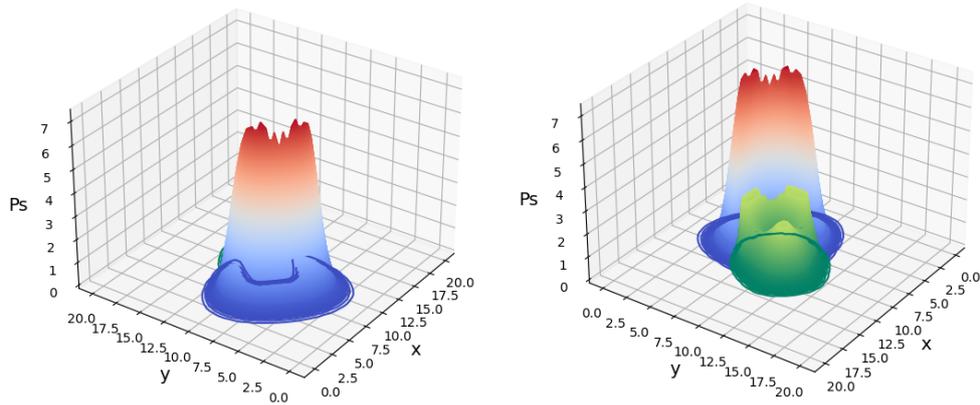


Figura 6: Evolução temporal das populações de presas e predadores para  $t = 18$ . Fonte: Os autores.

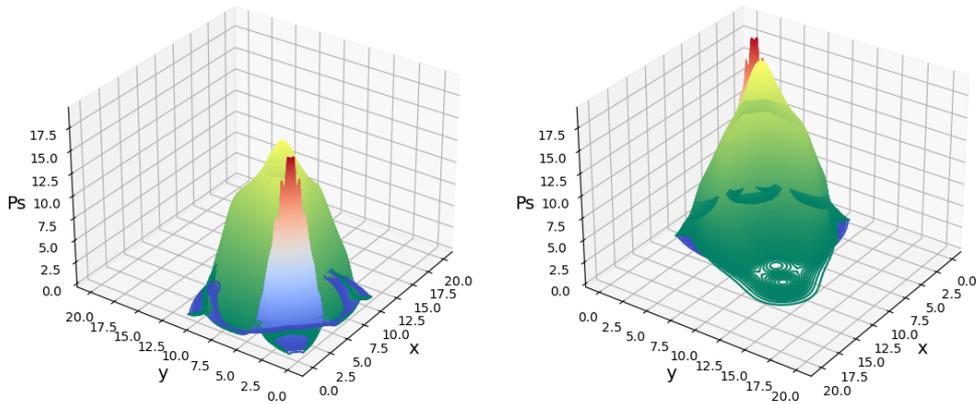


Figura 7: Evolução temporal das populações de presas e predadores para  $t = 30$ . Fonte: Os autores.

### 3.2 Cenário 2

Neste cenário os termos difusivos foram considerados diferentes de zero, isto é,  $b_1 = b_2 = 0,01$ . O intuito desta hipótese é verificar a influência do espalhamento de indivíduos na dinâmica estudada.

No tempo  $t = 2$ , conforme retratado na Figura 8, a população de presas cresce enquanto a população de predadores diminui. Neste caso, devido ao efeito da difusão, embora o pico da população de presas decresça, a função das presas fica mais larga quando comparada com a condição inicial (Figura 1).

Esse efeito é diferente do apresentado no cenário 1, onde em  $t = 2$  destacou-se mais o crescimento do pico da função das presas, sem que houvesse uma alteração significativa na largura, ver Figura 2. Com relação aos predadores, o decaimento do pico da população foi mais acentuado no cenário 2, conferir Figura 8, notando-se o alargamento da função que representa a população de predadores. Já no cenário 1, visto anteriormente, o decaimento foi menos acentuado, contudo a população de predadores não se espalhou.

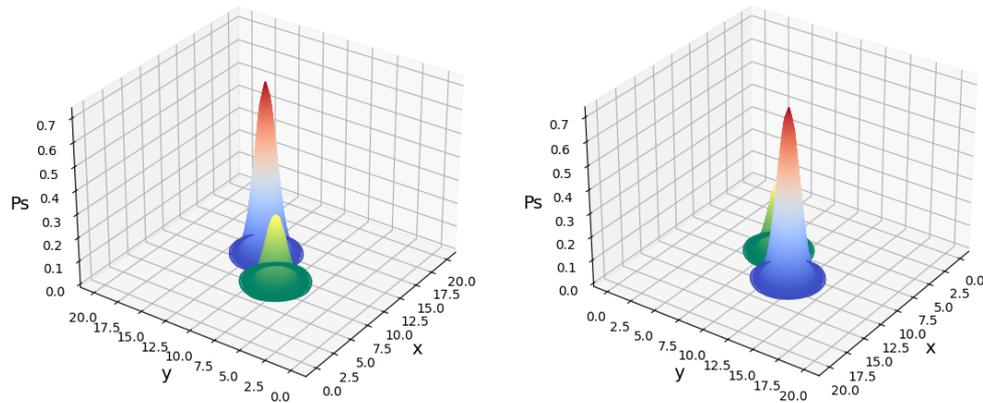


Figura 8: Evolução temporal das populações de presas e predadores para  $t = 2$ . Fonte: Os autores.

O avanço temporal, com os termos difusivos, seguiu de modo semelhante ao caso explicitado no cenário 1, no entanto, com ambas as populações mais dispersas. Este fato pode ser verificado nas Figuras 9 e 10, quando comparadas com as Figuras 4 e 6.

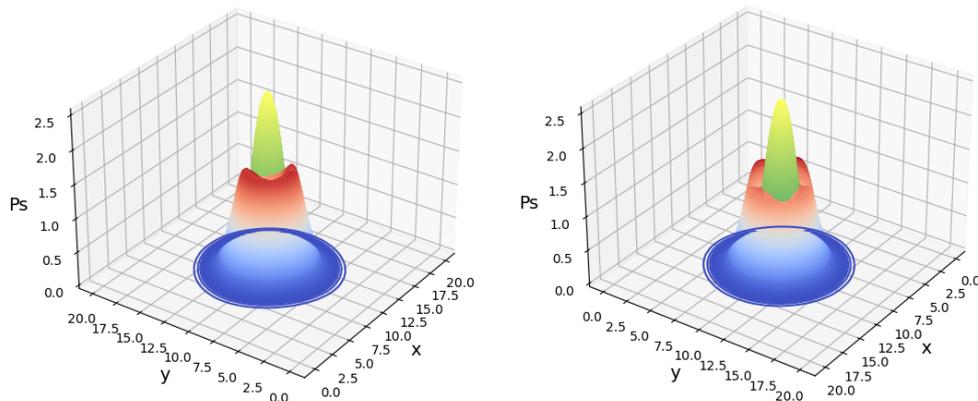


Figura 9: Evolução temporal das populações de presas e predadores para  $t = 10$ . Fonte: Os autores.

Note que, nos cenários exemplificados, o fenômeno difusivo contribuiu para a antecipação dos encontros entre indivíduos das populações de presas e predadores. Na vida prática, o clima, a temperatura, regimes de chuvas, períodos de seca e a composição do solo são alguns fatores que podem ocasionar desequilíbrios ecológicos e fazer com que espécies se espalhem.

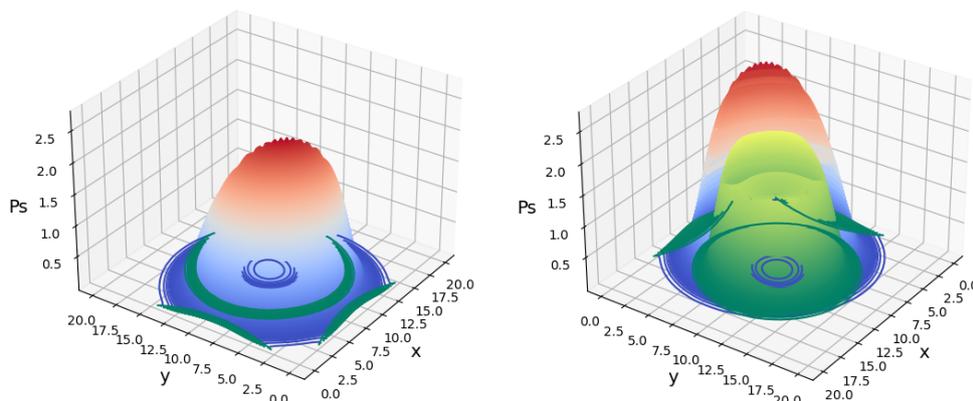


Figura 10: Evolução temporal das populações de presas e predadores para  $t = 18$ . Fonte: Os autores.

## 4 Considerações Finais

Nesta pesquisa, o foco principal foi compreender as diferentes interações que podem ocorrer entre populações de presas e predadores, distribuídas em um ambiente bidimensional. A motivação surge do fato de que migrações estão cada vez comuns, por conta de razões diversas, inclusive frente às mudanças climáticas vivenciadas atualmente no planeta Terra.

O modelo de Lotka-Volterra tal como descrito no sistema de equações diferenciais parciais (1), em conjunto com métodos numéricos implementados computacionalmente na linguagem Python, mostrou-se adequado para a geração de cenários. Simulações foram executadas e os resultados evidenciaram que a inclusão dos termos advectivos e difusivos viabiliza a modelagem do deslocamento das espécies, exibindo as diferentes dinâmicas que acontecem, em regiões onde os encontros interespecíficos sucederem ou não.

## Referências

- [1] P. -P. Liu. “An analysis of a predator–prey model with both diffusion and migration”. Em: **Mathematical and Computer Modelling** 51 (2010), pp. 1064–1070. DOI: 10.1016/j.mcm.2009.12.010.
- [2] J. D. Murray. **Mathematical Biology: I. An Introduction**. 3a. ed. New York: Springer-Verlag, 2002. ISBN: 0-387-95223-3.
- [3] ONU. **Causas e Efeitos das Mudanças Climáticas**. Online. Acessado em 29/03/2024, <https://www.un.org/pt/climatechange/science/causes-effects-climate-change>.
- [4] J. W. Thomas. **Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**. New York: Springer-Verlag, 1995. ISBN: 0-387-97999-9.