

# Método de Otimização Determinístico Baseado em Fractais e Caos Aplicado em Problemas Multimodais de Otimização Não Linear

Ernesto Lucanga Hombo<sup>1</sup>

FEB/UNESP, Bauru, SP

Antonio Roberto Balbo<sup>2</sup>, Tatiana Miguel Rodrigues<sup>3</sup>

DMAT/FC/UNESP, Bauru, SP

**Resumo.** Neste trabalho é apresentado o Algoritmo de Otimização e Caos (AOC), que combina métodos de gradientes e teoria de caos em Sistemas Dinâmicos. O AOC visa resolver problemas de otimização multimodais com funções objetivo não lineares e não convexas. Destaca-se a aplicação do método no problema de Despacho Econômico (PDE) com carregamento de pontos de válvula, cuja função objetivo é não linear, não convexa, e não diferenciável, a qual é tratada através de estratégias de suavização de funções, além de um outro problema multimodal da literatura. Entre os múltiplos pontos de mínimo determinados pelo método, apresentam-se o pior, o intermediário e o melhor ponto de mínimo que minimizam as funções objetivo desses problemas.

**Palavras-chave.** Otimização Determinística, Algoritmo de Otimização e Caos, Métodos de Gradientes, Problemas Multimodais, Problema de Despacho Econômico.

## 1 Introdução

Na atualidade, a otimização é importante para resolver problemas em diversas áreas [4, 5, 8, 10, 11]. A necessidade de encontrar soluções viáveis em problemas complexos impulsiona o desenvolvimento de técnicas e algoritmos de otimização em campos como engenharia, economia, logística e ciência da computação. Este contexto engloba o desafio da otimização de problemas restritos e irrestritos não lineares [1, 4, 11], fundamentais para o avanço tecnológico e econômico. Problemas como o despacho econômico, [4, 9], na Engenharia Elétrica exemplificam esse desafio, demandando métodos avançados de otimização devido à sua não linearidade e complexidade.

Este trabalho propõe investigar e desenvolver uma abordagem determinística baseada em técnicas de gradientes [4, 11], e de otimização e caos [4, 10], via Sistemas Dinâmicos [2, 3, 7]. A implementação e aplicação visa a determinação de múltiplos pontos de mínimo de problemas de otimização não linear, para a obtenção do melhor desses, a partir de uma solução inicial calculada através de mapas caóticos [4, 10]. Mas não se tem a garantia de que a melhor solução entre os múltiplos pontos de mínimos encontrados seja o seu ponto de mínimo global.

A metodologia adotada consistiu em fazer uma revisão bibliográfica, formulação da abordagem baseada em fractais e caos, estratégias baseados em métodos de gradientes e algoritmos caóticos, implementação do AOC em Python (v3.11) e aplicação em problemas modelados matematicamente, tais como o PDE [4, 9] e em um outro problema multimodal definido em [10].

---

<sup>1</sup>ernesto.hombo@unesp.br

<sup>2</sup>antonio.balbo@unesp.br

<sup>3</sup>tatiana.rodrigues@unesp.br

## 2 Revisão de Otimização Não Linear e Caos em Sistemas Dinâmicos

Considere o Problema de Otimização Não Linear definido entre outros em [4, 11]:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && g(x) \leq 0 \\ & && h(x) = 0 \\ & && x \in X, \end{aligned} \tag{1}$$

em que  $X \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto e  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , isto é,  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ , isto é,  $h(x) = (h_1(x), \dots, h_l(x))^T$ ,  $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ . Consideremos a região factível de (1) dada por:

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, l\}, \tag{2}$$

$A \subset \mathbb{R}^n$ . O Problema (1) pode ser escrito com apenas restrições de desigualdade [4, 11], apresentado pelo Problema (3):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & && a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3}$$

onde  $a_i$  e  $b_i$  são os limitantes inferior e superior para a variável  $x_i$  e  $p$  é o número total de restrições de desigualdade, tal que  $p = m + 2l$ . Vamos assumir que as funções  $f(x)$  e  $g_j(x)$  são diferenciáveis em  $\mathbb{R}^n$ . Considerando-se o Método de Penalização para o tratamento de problemas de otimização restritos, de acordo com [4, 11], o Problema (3) pode ser reescrito conforme (4):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && P(x, \sigma) = f(x) + \sigma \sum_{j=1}^p \max(0, g_j(x)) \\ & \text{sujeito a} && a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{4}$$

em que  $\sigma$  é o coeficiente positivo de penalidade e  $\sum_{j=1}^p \max(0, g_j(x))$  é a função de penalidade da restrição de desigualdade  $g(x) \leq 0$ .

Considerando-se funções diferenciáveis, soluções de mínimo local de (4) podem ser obtidas com métodos de gradientes (Newton, descida mais rápida, Levenberg-Maquardt, gradiente ponderado, e outros) [4, 6, 10, 11]. Mas podemos nos deparar com o problema de  $f(x)$  não ser diferenciável, como no caso do PDE e em lidar com problemas multimodais, que apresentam múltiplos pontos de mínimos locais para a função objetivo. Nesse caso, a não diferenciabilidade deve ser tratada com alguma estratégia, como a de suavização [4], por exemplo, para se poder aplicar métodos determinísticos de gradientes à resolução do problema, esses garantem apenas a determinação de um mínimo local para o problema, dependentes da solução inicial dada e fazendo com que o algoritmo fique preso na vizinhança desse ponto, não conseguindo explorar outras regiões do espaço de busca para encontrar possivelmente, o mínimo global do problema [4]. Essa limitação pode ser problemática nas situações em que o objetivo é encontrar a melhor solução, e possivelmente, a solução de mínimo global. Para auxiliar na determinação do possível mínimo global do Problema (4), vamos introduzir algumas definições em sistemas dinâmicos para explorar, em conjunto com os métodos determinísticos citados, o método de otimização e caos [10].

Fractais e caos são fenômenos presentes em sistemas dinâmicos não lineares [2, 3]. Um Sistema Dinâmico estuda a evolução de um fenômeno ao longo do tempo, essa evolução, é descrita por um processo iterativo, onde cada ponto resultante desse processo iterativo é denominado de órbita.

O Caos está presente em Sistemas Dinâmicos. Dada uma aplicação  $f : X \rightarrow X$ . Se  $f$  é topologicamente transitiva, tem dependência sensível às condições iniciais e tem pontos periódicos densos, então,  $f$  é um Sistema Dinâmico Caótico [3]. Um dos exemplos clássicos é a função quadrática (Mapa Logístico), descrita por

$$f_a(\gamma) = a\gamma(1 - \gamma), \tag{5}$$

que é caótica quando  $a > 2 + \sqrt{5}$ . Outro exemplo importante é a função

$$f_4(\gamma) = 4\gamma(1 - \gamma), \tag{6}$$

que também é caótica para  $\gamma \in [0, 1]$ . Essa função é usada no Algoritmo de Otimização e Caos descrito na Seção 3, que está associado aos métodos de otimização determinísticos, para determinar múltiplos pontos de mínimo do Problema (4), e possivelmente, o seu ponto de mínimo global.

### 3 Algoritmo de Otimização e Caos

O Algoritmo de Otimização e Caos (AOC) [10], foi desenvolvido com o objetivo de determinar múltiplas soluções de mínimos do Problema (4). No AOC, as variáveis que geram caos são calculadas por mapas logísticos definidos pelas funções  $M(\cdot) : \gamma^{l+1} = M(\gamma^l)$  e  $M(\gamma^l) = a\gamma^l(1 - \gamma^l)$ , onde  $a = 4$ , os passos definidos pelo algoritmo podem ser controlados considerando  $x_i \in [a_i, b_i], i = 1, \dots, n$ . O Algoritmo tem três fases na sua estrutura, como apresentado no **Algoritmo 1**.

Na fase (I) do algoritmo faz-se uma pesquisa por caos usando a primeira onda do mapa caótico. Nesta fase inicializa-se o número da primeira busca por caos  $S_1$ , segunda busca por caos  $S_2$ , parâmetro de penalidade  $\sigma$ , valor inicial da variável que gera caos  $\gamma_i^{(0)}$ , onde  $0 < \gamma_i^{(0)} < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Mapeia-se as variáveis que geram caos  $\gamma_i^{(l)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , pela equação  $x_i^{(l)} = a_i + \gamma_i^{(l)}(b_i - a_i)$ , onde  $x_i^{(l)}$  é o valor da variável de otimização  $x_i$  na iteração  $l$ ,  $a_i$  e  $b_i$  são os limites inferior e superior da variável  $x_i$  respectivamente e  $x^{(l)} = [x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_n^{(l)}]^T$ . Quando  $P(x^{(l)}, \sigma) \leq P^*$ , atualiza-se o valor mínimo  $P^*$  para  $P(x^{(l)}, \sigma)$  e armazena-se o vetor de variáveis de otimização correspondente,  $x^*$ , como a solução atual e o processo continua até satisfazer o critério de parada.

Na fase (II) do algoritmo, faz-se uma pesquisa ao longo de um método de gradiente. Inicializa-se o tamanho do passo  $\lambda > 0$ ,  $t_1 > 1$ ,  $0 < t_2 < 1$ , define-se  $k = 0$ . Faz-se  $\bar{x}^{(0)} = x^*$ , onde  $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ , calcula-se  $d(\bar{x}^{(k)})$  (direção de descida) e usa-se a equação  $x = \bar{x}^{(k)} + \lambda d(\bar{x}^{(k)})$  para determinar soluções de mínimos locais e valores ótimos associados a essas. Se  $P(x, \sigma) \leq P^*$  então  $\bar{x}^{(k)} = x$ ,  $P^* = P(x, \sigma)$  e  $\lambda \leftarrow t_2\lambda$ , caso contrário  $\lambda \leftarrow t_1\lambda$ .

Na fase (III) do Algoritmo faz-se uma busca por caos usando a segunda onda do mapa caótico. Nessa fase, define-se  $l' = 0$ , atualizam-se os valores que geram caos por  $\gamma_i^{(l'+1)} = M(\gamma_i^{(l')})$ ,  $\alpha_i = 0.01(b_i - a_i)$ ,  $x_i^{(l')} = x_i^* + \alpha_i(\gamma_i^{(l')} - 0.5)$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $x^{(l')} = [x_1^{(l')}, x_2^{(l')}, \dots, x_n^{(l')}]^T$ . Se  $P(x^{(l')}, \sigma) \leq P^*$ , então  $x^* = x^{(l')}$ ,  $P^* = P(x^{(l')}, \sigma)$  e pare. O processo continua até que o critério de parada seja satisfeito.

O ciclo do AOC pode ser definido após cumprir todas as fases descritas no Algoritmo 1 e depois repetir o processo da fase (II) para a fase (III) e vice-versa, até satisfazer algum critério de parada ou número máximo de iterações.

---

**Algoritmo 1** Algoritmo de Otimização e Caos (AOC)

---

**(I) Pesquisa de caos usando a primeira onda do mapa caótico**

**Etapa 1:** Inicialize  $S_1, S_2, \sigma, \gamma_i^{(0)}$ , onde  $0 < \gamma_i^{(0)} < 1, i = 1, \dots, n$

**Etapa 2:** Defina  $l = 0$  e  $P^* = \infty$ .

**Etapa 3:** Mapeie  $\gamma_i^{(l)}, i = 1, 2, \dots, n$ , por  $x_i^{(l)} = a_i + \gamma_i^{(l)}(b_i - a_i)$

**Etapa 4:** Se  $P(x^{(l)}, \sigma) \leq P^*$  Então

|  $x^* = x^{(l)}$  e  $P^* = P(x^{(l)}, \sigma)$ .

**Fim**

**Etapa 5:** Gerar  $\gamma_i^{(l+1)} = M(\gamma_i^{(l)}), i = 1, \dots, n$

**Etapa 6:** Se  $l < S_1$  Então

|  $l \leftarrow l + 1$  vá para **Etapa 3** de **(I)**

**Fim**

**Senão** Pare o primeiro processo de busca de caos Então

**Fim**

**(II) Pesquisa ao longo de um método de gradiente**

**Etapa 1:** Inicialize  $\lambda > 0, t_1 > 1, 0 < t_2 < 1$  e defina  $k = 0$

**Etapa 2:**  $\bar{x}^{(0)} = x^*$ , onde  $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$

**Etapa 3:** Calcule  $d(\bar{x}^{(k)})$

**Etapa 4:**  $x = \bar{x}^{(k)} + \lambda d(\bar{x}^{(k)})$

**Etapa 5:** Se  $P(x, \sigma) \leq P^*$  Então

|  $\bar{x}^{(k)} = x, P^* = P(x, \sigma)$  e  $\lambda \leftarrow t_2 \lambda$

**Fim**

**Senão**  $\lambda \leftarrow t_1 \lambda$  Então

**Fim**

**Etapa 6:** Enquanto  $P^*$  melhora faça

| vá para a **Etapa 4** de **(II)**

**Fim**

**Etapa 7:** Enquanto  $d(\bar{x}^{(k)}) \nrightarrow 0$  (não tender a zero) faça

|  $k \leftarrow k + 1$  e vá para a **Etapa 3** de **(II)**

**Fim**

**Etapa 8:**  $x^* = \bar{x}^{(k)}$ , ponto inicial de **(III)**

**(III) Busca de caos usando a segunda onda do mapa caótico**

**Etapa 1:**  $l' = 0$

**Etapa 2:** Atualize  $\gamma_i^{(l'+1)} = M(\gamma_i^{(l')}), \alpha_i = 0.01(b_i - a_i), x_i^{(l')} = x_i^* + \alpha_i(\gamma_i^{(l')} - 0.5), i = 1, \dots, n$  e  $x^{(l')} = [x_1^{(l')}, x_2^{(l')}, \dots, x_n^{(l')}]^T$

**Etapa 3:** Se  $P(x^{(l')}, \sigma) \leq P^*$  Então

|  $x^* = x^{(l')}, P^* = P(x^{(l')}, \sigma)$  e pare

**Fim**

**Senão** vá para a próxima **Etapa** Então

**Fim**

**Etapa 4:** Se  $l' < S_2$  Então

|  $\alpha_i \leftarrow t_3 \alpha_i$ , vá para a **Etapa 2** de **(III)**

**Fim**

---

## 4 Resultados Numéricos

O Algoritmo 1 relativo ao AOC, foi implementado em linguagem de programação Python (v3.11), em um notebook Asus Tuf Gaming f15 Intel(R) Core(TM) i5-10300H CPU @ 2.50GHz e aplicado à resolução dos Problemas 1 e 2 descritos a seguir.

**Problema 1:** O Problema do despacho econômico (PDE) [4], [9], é um problema de otimização da área de engenharia elétrica que envolve determinar a distribuição ideal de potências geradas pelas unidades geradoras de energia elétrica para atender à demanda de energia. O objetivo é minimizar os custos de operação do sistema elétrico, considerando fatores como os custos de geração, limites mínimos e máximos de potências ativas e a demanda total de energia. O PDE é formulado matematicamente, sem considerar perdas na transmissão, pelo Problema (7):

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(P_G) = \sum_{i=1}^n (a_i P_{G,i}^2 + b_i P_{G,i} + c_i) + \sum_{i=1}^n |e_i \text{sen}(f_i(P_{G,i}^{min} - P_{G,i}))| \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^n P_{G,i} = P_d, \quad P_{G,i}^{min} \leq P_{G,i} \leq P_{G,i}^{max}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (7)$$

em que  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $e_i$  e  $f_i$  são os coeficientes de custos de geração da unidade geradora  $i$ ,  $P_{G,i}$  é a potência gerada da  $i$ -ésima unidade geradora, cuja unidade é watts ( $W$ ) ou quilowatts ( $kW$ ),  $P_{G,i}^{min}$ ,  $P_{G,i}^{max}$ , são os limites mínimo e máximo de geração de potências, respectivamente,  $\text{sen}(f_i(P_{G,i}^{min} - P_i))$  é a função que modela o carregamento de pontos de válvula da unidade geradora  $i$ ,  $P_d$  é a demanda de potência a ser atendida. O Problema (7), é multimodal, a função objetivo é não diferenciável, pelo que, é necessário suavizá-la pelo método de suavização hiperbólica [9], para possibilitar a sua resolução através de métodos de gradientes presentes no Algoritmo 1. Para testar o AOC, vamos considerar um PDE de três geradores, cujos dados são apresentados na Tabela 1:

Tabela 1: PDE - Três geradores. Fonte: [9].

Gerador (i)	$P_{G,i}^{min}$ (MW)	$P_{G,i}^{max}$ (MW)	$a_i$ (\$/(MW <sup>2</sup> ))	$b_i$ (\$/(MW))	$c_i$ (\$)	$e_i$ (\$)	$f_i$ ((1/MW))
1	100	600	0,001562	7,92	561	300	0,0315
2	50	200	0,00482	7,97	78	150	0,063
3	100	400	0,00194	7,85	310	200	0,042

Demanda: D = 850 MW

A Figura 1, contém a representação gráfica da função objetivo suavizada definida em (8) e curvas de nível desta.

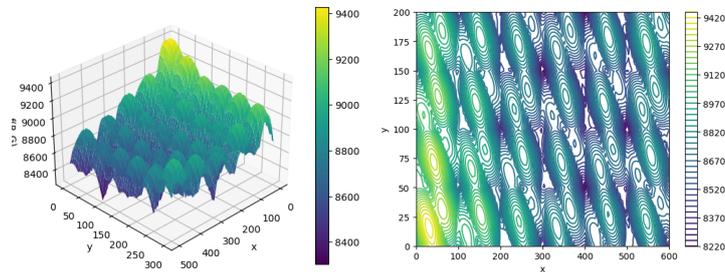


Figura 1: Função objetivo suavizada e curvas de nível ( $\eta = 10$ ). Fonte: [4].

Usando a estratégia de Suavização [9] e considerando-se a formulação matemática do problema

definido em (4), o problema pode ser escrito de forma equivalente, como:

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar } P(\mathbf{P}_G, \sigma) = & 0.001562P_{G,1}^2 + 7.92P_{G,1} + 561 + \sqrt{(300 \sin(0.0315(100 - P_{G,1})))^2 + \eta} \\
 & + 0.00482P_{G,2}^2 + 7.97P_{G,2} + 78 + \sqrt{(150 \sin(0.063(50 - P_{G,2})))^2 + \eta} \\
 & + 0.00194P_{G,3}^2 + 7.85P_{G,3} + 310 + \sqrt{(200 \sin(0.042(100 - P_{G,3})))^2 + \eta} \\
 & + \sigma((P_{G,1} + P_{G,2} + P_{G,3} - 850)^2 + (-P_{G,1} - P_{G,2} - P_{G,3} + 850)^2 \\
 & + (-P_{G,1} + 100)^2 + (P_{G,1} - 600)^2 + (-P_{G,2} + 50)^2 + (P_{G,2} - 200)^2 \\
 & + (-P_{G,3} + 100)^2 + (P_{G,3} - 400)^2) \\
 \text{sujeito a: } & P_{G,i} \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Usando o AOC, a Tabela 2 mostra os diferentes valores de mínimos obtidos durante o processo iterativo.

Tabela 2: Resultados numéricos do AOC - Problema 1. Fonte: [4].

Problema 1	Pior Mínimo (\$)	Mínimo Intermediário (\$)	Melhor Mínimo	Melhor Solução (KW)
PDE	8375.6	8241.7	8234.4	(300.82, 149.76, 399.42)

**Problema 2:** É um problema de minimização com restrição de desigualdade e variáveis canalizadas, que foi extraído de [10], que consiste em:

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar } f(x, y) = & -[x \text{sen}(9\pi y) + y \text{cos}(25\pi x) + 20] \\
 \text{Sujeito a: } & x^2 + y^2 \leq 81 \\
 & x, y \in [-10, 10]
 \end{aligned} \tag{9}$$

A Figura 2 representa os gráficos da função objetivo e de suas curvas de nível do Problema 2.

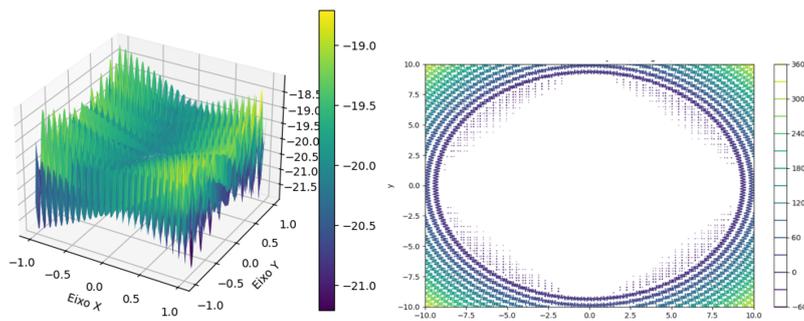


Figura 2: Gráfico e Curvas de Nível. Fonte: [4].

Considerando-se a formulação matemática do problema definida em (4), o Problema 2 é reescrito como:

$$\text{minimizar } P((x, y), \sigma) = -[x \text{sen}(9\pi y) + y \text{cos}(25\pi x) + 20] + \sigma(x^2 + y^2 - 81), (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{10}$$

Usando o AOC, a Tabela 3 mostra as soluções do Problema 2.

Tabela 3: Resultados numéricos do AOC - Problema 2. Fonte: [4].

Problema	Pior Mínimo	Mínimo Intermediário	Melhor Mínimo	Melhor Solução
2	-19.82274	-32.6128	-32.6313	(-5.8575, -6.6073)

## 5 Considerações Finais

Nesse trabalho considerou-se uma abordagem determinística envolvendo o AOC, para a determinação de múltiplos pontos de mínimo de problemas de otimização multimodais, onde o método mostrou-se ser uma ferramenta promissora para a resolução desses. Futuramente, pretende-se incluir o conjunto de Julia no AOC, visando melhorar a abordagem proposta, bem como para possibilitar a resolução de problemas multimodais de dimensão maior.

## Agradecimentos

À CAPES pela bolsa de Doutorado e ao CNPq (Projeto CNPq-304218/2022-7).

## Referências

- [1] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali e C. M. Shetty. **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms**. Wiley-Interscience, 2006.
- [2] R. L. Devaney. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition**. Addison- Wesley Publishing Company, 1948.
- [3] K. Falconer. **Fractal Geometry**. John Wiley-Sons Ltd., 1990.
- [4] E. L. Hombó. “Método de Otimização Determinística E Fractais Aplicado À Determinação De Múltiplos Pontos De Mínimo Em Problemas De Otimização Não Linear”. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista, "Julio de Mesquita Filho", 2023.
- [5] C. T. Kelley. **Iterative Methods for Optimization**. SIAM, 1999.
- [6] D. W. Marquardt. “An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters”. Em: **Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics** 11.2 (1963), pp. 431–441.
- [7] H. M. de L. Ribeiro. “Conjunto de Julia”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2014.
- [8] A. E. Schwertner. “O Método de Levenberg-Marquardt para problemas de Otimização de Menor Valor Ordenado”. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Maringá- PR, 2019.
- [9] D. N. Silva. “Método Primal-Dual Previsor-Corretor de Pontos Interiores e Exteriores com Estratégias de Correção de Inércia e Suavização Hiperbólica Aplicado ao Problema de Despacho Econômico com Ponto de Carregamento de Válvula e Representação da Transmissão”. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista, "Julio de Mesquita Filho", 2014.
- [10] M. S. Tavazoei e M. Haeri. “An optimization algorithm based on chaotic behavior and fractal nature”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 206 (2007) 1070 – 1081 (2006).
- [11] D. F. M. Torres. **Programação Matemática**. UA, 2021.