Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Explorando o Princípio das Casas dos Pombos no Ensino Médio: Proposta de Uma Atividade

Jônathas Douglas Santos de Oliveira[1] Luiz Fernando Bento[2] Marcos Henrique Caetano Oliveira[3] Dênis E. C. Vargas[4]
CEFET-MG, Belo Horizonte, MG

Resumo. Este artigo consiste em oferecer uma proposta de atividade e material de apoio destinado à disciplina de Núcleo e Inovação Matemática, ministrada em algumas escolas do estado de Minas Gerais no contexto do Novo Ensino Médio, com enfoque central no ensino do Princípio das Casas dos Pombos, também conhecido como Princípio das Gavetas. As atividades têm o intuito de instigar os estudantes a aprimorarem suas habilidades de escrita matemática por meio da descoberta de generalizações relacionadas à contagem, empregando processos dedutivos, bem como aprimorar as habilidades de interpretação dos alunos, contribuindo para uma melhor compreensão e resolução de problemas matemáticos, entre outras potenciais habilidades a serem desenvolvidas.

Palavras-chave. Princípio das Gavetas, Casas dos Pombos, Ensino Médio.

1 Introdução

A partir de experiência vivenciadas em sala de aula, observa-se que uma das primeiras dificuldades enfrentadas pelos alunos ao resolver problemas matemáticos é a dificuldade de interpretação, e, em alguns casos, a total falta de leitura interpretação dos enunciados propostos. Expressões como "em que situação eu utilizo esse dado?" ou "não compreendi o que está sendo solicitado!", refletem as dificuldades dos estudantes ao se depararem com exercícios de matemática. Isso também reflete nos dados do PISA 2022, os quais indicam que os estudantes apresentam resultados mais baixos em leitura, matemática e ciências em comparação com os obtidos em 2018. Essa dificuldade inicial ressalta a importância de desenvolver estratégias específicas para aprimorar as habilidades de interpretação dos alunos, contribuindo para uma melhor compreensão e resolução de problemas matemáticos.

Considerando essa perspectiva, apresentamos aqui um material de suporte para docentes de matemática que lecionam as aulas do Núcleo e Inovação Matemática (NIM). Essa disciplina é ministrada em algumas escolas do estado de Minas Gerais no contexto do Novo Ensino Médio e tem como premissa a famosa frase "Matemática está em tudo", buscando evidenciar o diálogo que a matemática tem com as outras áreas do saber. Neste contexto, as atividades propostas exploram a articulação entre a Língua Portuguesa e a Matemática, evidenciando a riqueza e a importância dessa relação para que o aluno possa reinterpretar as questões matemáticas para compreendê-las e resolvê-las de maneira mais eficaz.

Para incorporar o espírito inovador do "I" em NIM, propomos explorar o Princípio das Casas dos Pombos (PCP), um conteúdo muitas vezes negligenciado no ensino médio, apesar de sua

[1]jonathas.math.oliveira@gmail.com
[2]Lfbluiz70@gmail.com
[3]marcos17ho@gmail.com
[4]denis.vargas@cefetmg.br

profundidade. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ([2]) não faz referência explícita ao princípio das gavetas, no entanto, destaca a importância de incluir conteúdos que estimulem processos reflexivos e abstratos, sustentando modos de pensamento criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos. Reconhecemos que o PCP, embora simples, é profundamente alinhado a esses objetivos. É possível encontrar trabalhos na literatura que utilizam PCP com alunos do Ensino Básico, tais como as dissertações do PROFMAT [1] e [4].

O restante do artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 resgata a fundamentação teórica de Análise Combinatória e PCP. A atividade proposta é apresentada e discutida na Seção 3. Por fim, a Seção 4 revela as conclusões e possíveis direções para trabalhos futuros.

2 Análise combinatória e o Princípio das Gavetas de Dirichlet

Ao iniciarmos o estudo de Análise Combinatória (A.C.) introduzimos a ideia de um método de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. Com isto desenvolvemos os conceitos de Permutações, Arranjos, Combinações, entre outros. Isto cria no imaginário dos estudantes que a A.C. é simplesmente o uso de certas fórmulas para "atacar" os problemas propostos, que se diga de passagem, são muitos que se resolvem com esses 3 conceitos citados. Para além de simplesmente determinar a quantidade de subconjuntos, é crucial compreender o método pelo qual realizamos essa contagem. Nesse contexto, a aprendizagem de técnicas fundamentais tais como o Princípio da Inclusão-Exclusão, o Princípio das Gavetas de Dirichlet, as Funções Geradoras, a Teoria de Ramsey, entre outras, revela-se não apenas interessante, mas também essencial. Tais técnicas permitem responder os dois tipos de perguntas mais comuns em problemas que envolvem A.C.:

- Como contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito que satisfazem certas condições dadas?
- Como demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e satisfazem certas condições?

Neste texto vamos nos ocupar em resolver os problemas do segundo tipo citado utilizando uma ferramenta bem simples, o *Princípio das Gavetas de Dirichlet.* As definições e resultados apresentados nessa seção foram baseados em [3] e [5].

O Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como O Princípio da Casa dos Pombos, reflete a seguinte situação: suponha que você tenha alguns objetos e queira guardar esses objetos em gavetas, se o número de objetos for maior que o número de gavetas então pelo menos uma gaveta conterá mais de um objeto. Tal princípio foi usado pela primeira vez pelo matemático alemão Lejeune Dirichlet (1805-1859). De maneira formal, podemos enunciar o Princípio das Gavetas de Dirichlet como:

Teorema 2.1 (Princípio das Gavetas de Dirichlet). *Se $n+1$ objetos forem colocados em no máximo n gavetas, então pelo menos uma delas conterá ao menos dois objetos.*

Demonstração. A demonstração desse princípio ocorre por redução ao absurdo. Suponhamos que em cada gaveta não exista mais que um objeto, então contando os objetos contidos nas gavetas não teríamos mais que n objetos, o que contrária a hipótese de existir $n+1$ objetos □

Outra forma de apresentar o teorema acima de uma forma mais geral é:

Teorema 2.2. *Se n objetos forem colocados em no máximo r gavetas, com $r < n$, então, pelo menos uma das gavetas conterá ao menos dois objetos.*

Exemplo 2.1. *Em um grupo de 5 cartas de baralho, pelo menos 2 são do mesmo naipe.*

Observe que um baralho convencional possui 4 naipes distintos: Copas, Espadas, Ouros e Paus. Tomando 4 cartas, no pior cenário possível, pode ser que cada uma tenha um dos quatro naipes disponíveis, mas, ao tomar a 5º carta, necessariamente, um dos naipes ficará com 2 cartas.

Para resolver a maioria dos problemas de PCP vamos ter que nos concentrar em responder as seguintes perguntas:

i. Quem são os pombos? (Quais são os objetos?)
Neste passo devemos preocupar em determinar quais são os pombos/objetos que deverão entrar nas casas/gavetas. No exemplo anterior, os pombos são as cartas.

ii. Quais e quantas são as casas? (Quais e quantas são as gavetas?)
Neste passo devemos construir de "maneira esperta", as casas/gavetas. Elas devem satisfazer duas condições:

   – As casas/gavetas devem ser duas a duas disjuntas;
   – A união das casas/gavetas devem conter todos os pombos/objetos.

   No exemplo anterior, as casas/gavetas são os naipes.

iii. Como vou colocar os pombos/objetos em uma casa/gaveta?
Neste passo devemos criar uma função que associa cada pombo/objeto com sua respectiva casa/gaveta. No exemplo anterior, podemos criar a função:

$$f : \{Cartas\ do\ Baralho\} \longrightarrow \{Naipe\}. \tag{1}$$

Veja os exemplos abaixo de como a função funciona.

$$f(7\diamondsuit) = Ouros;\ f(7\heartsuit) = Copas;\ f(4\clubsuit) = Paus;\ f(A\spadesuit) = Espadas; \tag{2}$$

Uma dica importante para a resolução de problemas que envolvam o PCP é pensar que somos azarados e vamos fazer as distribuições da pior forma possível. No problema das cartas, podemos retirar 2 cartas e elas serem do mesmo naipe (mas isso não é garantido), assim como ao retirar 3 ou 4 cartas. Por isso a necessidade da retirada de 5 cartas. O Princípio das Gavetas de Dirichlet pode ser generalizado e aplicado em problemas mais gerais da seguinte maneira:

Teorema 2.3. *Se n gavetas forem ocupadas por $nk+1$ objetos, então pelo menos uma casa deverá conter $k+1$ objetos.*

Demonstração. Por contradição, suponha que cada uma das n gavetas tenha no máximo k objetos, então teríamos no máximo nk objetos, o que é uma contradição, já que distribuímos $nk+1$ objetos. □

Exemplo 2.2. *Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para podermos garantir que nele haja pelo menos cinco pessoas nascidas no mesmo mês?*

Neste caso, os pombos/objetos são as pessoas. Temos um total de 12 casas, cada uma correspondendo aos meses do ano. Observe que, no Teorema 2.3, garantimos que uma da n casas/gavetas tem pelo menos $k+1$ pombos/objetos. Assim, como queremos garantir que existam 5 pessoas que aniversariam no mesmo mês, então $k+1=5$, ou seja $k=4$. Portanto pelo PCP, com $12\cdot 4+1=49$ pessoas, conseguimos garantir que $4+1=5$ delas aniversariam no mesmo mês.

3 Atividade proposta

Nessa seção apresentaremos a atividade proposta para trabalharmos com PCP no Ensino Médio. Terence Tao, em seu livro "Como Resolver Problemas Matemáticos" [6], oferece princípios valiosos que não apenas desvendam mistérios matemáticos, mas também desenvolvem uma mentalidade analítica. Com base no livro mencionado, compilamos uma lista de ideias que nos ajudam a abordar textos matemáticos de maneira mais eficaz, permitindo extrair deles um entendimento mais profundo do que é solicitado.

1. **Compreenda o Problema:** Leia cuidadosamente o enunciado do problema e identifique as informações fornecidas e o que é solicitado.

2. **Faça uma Representação Gráfica ou Simbólica:** Se possível, crie um diagrama ou representação visual do problema e utilize variáveis e equações para simbolizar as relações.

3. **Reduza o Problema:** Tente simplificar o problema, considerando casos especiais ou reduzindo-o a um caso mais simples e considere exemplos específicos para ganhar intuição.

4. **Identifique Padrões:** Procure por padrões ou regularidades no problema e considere casos particulares para descobrir tendências.

5. **Experimente Abordagens Diferentes:** Considere diferentes métodos para abordar o problema. Se uma abordagem não estiver funcionando, tente outra.

6. **Seja Metódico:** Organize suas ideias de maneira lógica e desenvolva uma estratégia clara para resolver o problema.

7. **Revise e Refine:** Revise suas soluções em busca de erros e refine sua abordagem e procure maneiras mais elegantes ou eficientes de resolver o problema.

8. **Pratique Regularmente:** Resolva uma variedade de problemas para aprimorar suas habilidades e a prática constante é essencial para desenvolver a capacidade de resolver problemas matemáticos.

Uma vez que cada problema é único e a abordagem pode variar, Terence Tao [6] enfatiza a importância de desenvolver intuição matemática e uma abordagem flexível para resolver diferentes tipos de problemas. Assim, o roteiro da atividade é exibido a seguir:

Atividade: Explorando o Princípio da Casa dos Pombos no ensino médio.

- **Objetivo:** introduzir os alunos do ensino médio o PCP e capacitá-los a aplicar esse princípio na resolução de problemas práticos, incluindo questões semelhantes às encontradas em vestibulares e concursos.

- **Descrição da Atividade:**

  1. *Introdução e explicação teórica do PCP:*
     O professor apresentará aos alunos o conceito do PCP, explicando sua importância e aplicabilidade em diversos contextos matemáticos. Em seguida, fornecerá uma explicação teórica detalhada do princípio, demonstrando sua formulação e oferecendo exemplos ilustrativos para facilitar a compreensão dos alunos.

2. *Lista de Exercícios*:
   Os alunos receberão uma lista de exercícios contendo 15 questões, divididas em dois grupos:
   (a) Primeiro Grupo (10 questões de fixação): Estas questões envolvem exercícios de fixação para consolidar PCP. Os alunos trabalharão em grupos para verificar a compreensão da aplicação do princípio. As questões foram retiradas de vestibulares e concursos públicos, destacando que este conteúdo é relevante para aqueles que aspiram ingressar em carreiras públicas, pois é parte integrante do conteúdo exigido nessas provas.
   (b) Segundo Grupo (5 questões abertas de generalizações): Estas questões incentivam os alunos a formular conjecturas sobre os itens por meio da observação de padrões e da utilização de tecnologias digitais, como o GeoGebra para problemas de geometria. Posteriormente, os alunos são encorajados a formalizar essas conjecturas por meio de uma escrita matemática concisa e argumentativa. Para os exercícios 4 e 5 desse grupo, é aconselhável levar os estudantes à sala de informática sempre que esse recurso estiver disponível. Dessa forma, eles têm a oportunidade de testar suas hipóteses e verificar se as soluções propostas fazem sentido na prática. O ambiente da sala de informática oferece uma plataforma interativa, permitindo que os alunos apliquem conceitos teóricos de forma concreta, enriquecendo assim sua compreensão e proporcionando uma experiência de aprendizado mais envolvente.

   Os alunos serão incentivados a discutir e resolver as questões em grupo, promovendo a colaboração e o compartilhamento de estratégias de resolução. Visando orientar os alunos na resolução dos problemas de maneira adequada, apresentaremos a seguir (Figura 1) um modelo de resposta esperada. Este modelo inclui a especificação de quem representa os pombos, as casas, a função que relaciona o pombo à casa, a aplicação do PCP e a conclusão. A ideia é que esse modelo seja usado para a resolução dos problemas.

EXEMPLO

Richard escolheu sete números do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$. *Mostre que existe um par que soma 12.*
Ao deparar com esse problema, sabemos quase de imediato que os "Pombos"serão os números escolhidos. Devemos desenvolver uma estratégia esperta para construir as casas corretas.
Como queremos um par cuja soma é 12, vamos separar os números de modo que isso seja satisfeito. Construímos então os seguintes conjuntos:

$$\{1, 11\},\ \{2, 10\},\ \{3, 9\},\ \{4, 8\},\ \{5, 7\} \text{ e } \{6\}.$$

Desta forma, ficamos com a seguinte situação:
→ **Pombos:** Sete números dentre $\{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$.
→ **Casas:** $A = \{1, 11\},\ B = \{2, 10\},\ C = \{3, 9\},\ D = \{4, 8\},\ E = \{5, 7\}$ e $F = \{6\}$.
→ **Função/Regra:** Quando um número é escolhido ele é colocado em sua respectiva casa.
Usando a forma mais simples do PCP *"Se $n + 1$ objetos forem colocados em no máximo, n gavetas, então pelo menos uma delas conterá ao menos dois objetos."*, podemos concluir que há pelo menos uma casa contendo dois números, sendo certo que essa casa não pode ser a casa F, pois esta contém apenas um número.
Consequentemente, a casa que receber esses dois números terá a soma de 12, conforme desejado.

Figura 1: Modelo de resposta esperada a ser usado na resolução dos problemas. Fonte: dos autores.

O link com a atividade proposta, bem como com a solução de todos os problemas no modelo proposto, está disponível aqui.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0398

3. *Apresentação de Soluções*:
   Ao final da atividade, os grupos apresentarão suas soluções para as questões propostas, permitindo uma revisão coletiva e a consolidação do entendimento do PCP.

4. *Benefícios da Atividade*:

   (a) A atividade proporciona aos alunos a oportunidade de aplicar um conceito matemático abstrato em situações práticas e variadas, incluindo questões de múltipla escolha similares às encontradas em vestibulares e concursos.

   (b) Estimula o pensamento crítico, a resolução de problemas e a colaboração entre os alunos.

   (c) Reforça a compreensão do PCP por meio da prática e da discussão em grupo.

   (d) Essa atividade visa não apenas ensinar o conceito em si, mas também mostrar aos alunos como ele pode ser utilizado para resolver problemas do mundo real, preparando-os para desafios acadêmicos e profissionais mais amplos, especialmente aqueles relacionados a carreiras públicas.

Sobre as generalizações e experimentações que podem ser feitas com o GeoGebra, apresentamos uma possibilidade de applet (Figura 2) construído para este propósito e que está disponível no seguinte endereço: https://www.geogebra.org/m/k29rbwqx. Na questão 4, item a) do material proposto, os alunos são desafiados a demonstrar que, ao escolher cinco pontos distintos em um triângulo equilátero de lado 1, sempre haverá pelo menos dois pontos cuja distância é menor ou igual a $\frac{1}{2}$. No Applet fornecido, os alunos podem interagir movendo os pontos de A até E e observar empiricamente que nunca será possível posicionar os cinco pontos dentro do triângulo sem que pelo menos dois deles tenham uma distância menor ou igual a $\frac{1}{2}$. Essa visualização dinâmica e interativa oferecida pelo GeoGebra é fundamental para a compreensão e a formulação de conjecturas pelos alunos, permitindo que eles explorem padrões e testem suas hipóteses de forma visual e intuitiva.

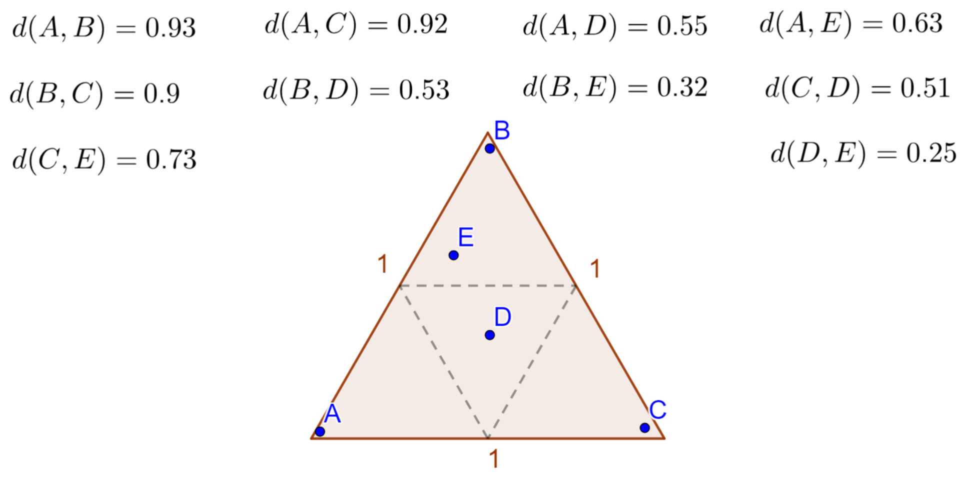

Figura 2: Applet do GeoGebra para experimentação da letra a) da questão 4 construído pelos autores e disponível em https://www.geogebra.org/m/k29rbwqx. Fonte: dos autores.

4 Considerações Finais

Com a implementação do Novo Ensino Médio no Brasil, surgiram novas disciplinas que buscam promover uma formação integral do sujeito, entre elas destacamos o Núcleo de Inovação Matemática (NIM). Ao longo deste trabalho, buscamos propor um material de suporte para a disciplina Núcleo e Inovação Matemática, explorando o Princípio da Casa dos Pombos (PCP) e estimulando os estudantes a desenvolverem as habilidades de interpretação e resolução de problemas matemáticos.

Inicialmente, apresentamos o Princípio das Casas dos Pombos ou Princípio das Gavetas de maneira mais formal, realizando sua demonstração e mostrando sua aplicabilidade na resolução de problemas. Em seguida, abordamos alguns problemas relacionados ao PCP e, por fim, apresentamos uma técnica de resolução de problemas baseada no livro "Como Resolver Problemas Matemáticos"de Terence Tao.

A atividade proposta buscou estimular uma postura ativa na qual os estudantes devem investigar os problemas apresentados e estabelecer estratégias de resolução. Como trabalhos futuros, pretendemos aplicar a atividade na disciplina e relatar a experiência posteriormente. Esperamos que essa abordagem ajude os alunos a desenvolverem não apenas habilidades matemáticas, mas também habilidades de pensamento crítico, investigativo e resolutivo, preparando-os para desafios acadêmicos e profissionais mais amplos.

Agradecimentos

Esse artigo foi fruto de um trabalho dos alunos Luiz Fernando Bento e Marcos Henrique Caetano Oliveira iniciado na disciplina Matemática Discreta do PROFMAT do CEFET-MG, a qual foi ministrada pelos docentes Jônathas Douglas Santos de Oliveira e Dênis E. C. Vargas em 2023. Agradecemos ao CEFET-MG e ao PROFMAT pelo apoio.

Referências

[1] L. A. B. Amorim. “O Ensino do Princípio das Casas dos Pombos no Ensino Básico”. Dissertação de mestrado. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - IMPA, 2013.

[2] Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Acessado em 04/01/2024, http://basenacionalcomum.mec.gov.br. 2018.

[3] A. C. Morgado, J. B. P. de Carvalho, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez. **Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios**. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 2006. ISBN: 8585818018.

[4] L. M. S. Neto. “Análise Combinatória: Lemas de Kaplansky, Permutações Caóticas, O Princípio da Casa dos Pombos e suas Aplicações na Matemática do Ensino Médio”. Dissertação de mestrado. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2020.

[5] J. P. O. Santos, M. P. Mello e I. T. C. Murari. **Introdução à análise combinatória**. Ed. Ciencia Moderna, 2007.

[6] T. Tao. **Como resolver problemas matemáticos: uma perspectiva pessoal**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

