

# O método Integral Baseado em Galerkin Aplicado na Descrição da Secagem Intermitente de Sólidos Elipsoidais

Célia M. R. Franco<sup>1</sup>

UAFM/UFCCG, Cuité, PB

Antonio G. B. Lima<sup>2</sup>

UAEM/UFCCG, Campina Grande, PB

**Resumo.** O processo de secagem é comum em operações industriais para conservação de alimentos. A forma geométrica elipsoidal e suas variações são encontradas em produtos agrícolas, tais como: grãos de arroz, trigo e feijão. Neste sentido, este trabalho tem como objetivo prever a distribuição de umidade no interior de sólidos com formato elipsoidal durante o processo de secagem intermitente. Para tanto, utilizou-se o método integral baseado em Galerkin (método GBI) para obter a solução da equação de difusão incorporando o período de têmpera na cinética de secagem intermitente. Foram realizados testes de simulação numérica variando a duração do período de têmpera e o efeito na cinética de secagem foi avaliado.

**Palavras-chave.** Equação de Difusão, Simulação Numérica, Cinética de Secagem, Elipsoide.

## 1 Introdução

A operação de secagem pode ser modelada considerando os conceitos de fenômenos de transporte a partir da lei de Fick para difusão de massa e da lei de Fourier para condução de calor, além de correlações empíricas ou semi-empíricas mais simples, que também são bastante utilizadas para prever a taxa de secagem de produtos agrícolas. É possível fazer previsão da distribuição de umidade e/ou temperatura local no produto e definir o tempo de processamento para o produto atingir um determinado teor de umidade adequado para conservação. Os valores médios do teor de umidade do produto são utilizados para monitorar o processo de secagem e avaliar sua eficiência.

Para a geometria elipsoidal, a solução da equação de difusão é bastante complexa de aplicar em problemas industriais e da engenharia [1, 8]. O método integral baseado em Galerkin (método GBI) se destaca como método alternativo para obter solução analítica aproximada da equação de difusão para geometrias arbitrárias [3, 6, 9].

A técnica de secagem intermitente vem sendo utilizada na indústria de processamento de alimentos com o objetivo de melhorar a qualidade dos produtos secos e reduzir o consumo energético. Uma secagem intermitente é composta por uma sucessão de ciclos, cada um deles consistindo em um período de secagem ativa seguido de um período de têmpera [2, 7]. Ainda são escassos os trabalhos científicos com objetivo de descrever a secagem intermitente de sólidos elipsoidais. Em [3] é apresentado um modelo matemático para descrever secagem contínua e intermitente de sólidos elipsoidais. O período de têmpera (período de repouso) foi considerado na modelagem e a solução da equação de difusão com condição de contorno de equilíbrio (condição de contorno de Dirichlet ou do primeiro tipo) foi obtida via método GBI.

---

<sup>1</sup>celia.maria@professor.ufcg.edu.br

<sup>2</sup>antonio.gilson@ufcg.edu.br

Neste estudo, utilizou-se o método integral baseado em Galerkin (método GBI) para descrever a secagem intermitente de sólidos elipsoidais, considerando condição de contorno convectiva (condição de contorno do terceiro tipo). Desta forma, foi possível realizar testes de simulação computacional para diferentes condições operacionais de secagem intermitente e avaliar possíveis vantagens quando comparado à secagem contínua.

## 2 Modelo Matemático

Para descrever o processo de secagem, considerou-se a equação de difusão transiente bidimensional em coordenadas cilíndricas dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD \frac{\partial M}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (D \frac{\partial M}{\partial z}), \quad \text{em } \Omega. \quad (1)$$

em que  $M$  denota o teor de umidade e  $D$  é o coeficiente de difusão de massa. Neste caso, assumiu-se uma difusão simétrica em relação ao eixo  $z$  de forma que a posição no interior do elipsoide pode ser determinada pelas coordenadas  $(r, z)$  definidas através do sistema de eixos  $r$  e  $z$  com origem no centro do elipsoide como mostra a Figura 1.

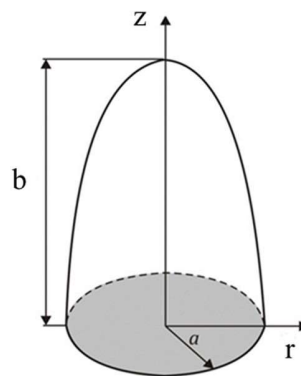


Figura 1: Elipsoide prolato no sistema de coordenadas cilíndricas ( $z \geq 0$ ). Fonte: dos autores.

O problema matemático consiste em obter uma solução  $M(r, z, t)$  da equação (1) com a condição inicial  $M(r, z, 0) = M_0$  e satisfazendo a condição de contorno de terceira espécie, em que o fluxo difusivo de massa que atravessa a fronteira é igualado ao fluxo convectivo de massa na vizinhança da mesma, isto é:

$$-D \frac{\partial M}{\partial \vec{n}} = h_m (M - M_{eq}), \quad \text{em } S. \quad (2)$$

em que  $\vec{n}$  é um vetor unitário normal exterior à superfície  $S$  do elipsoide,  $M_{eq}$  é o teor de umidade de equilíbrio e  $h_m$  é o coeficiente de transferência de massa convectivo.

A fim de permitir a solução do problema físico, as seguintes hipóteses foram consideradas: (a) o sólido é homogêneo e isotrópico; (b) as propriedades termofísicas são constantes ao longo do processo; (c) as condições de contorno são homogêneas.

A solução do modelo foi implementada na forma adimensional considerando a mudança de variável  $M^* = \frac{M - M_{eq}}{M_0 - M_{eq}}$  na equação (1).

Assim, a condição inicial e a condição de contorno homogênea tornam-se:  $M^* = 1$  e  $-D \frac{\partial M^*}{\partial n} = h_m M^*$ , em S.

O método integral baseado em Galerkin consiste em obter solução da equação (1) na forma [6, 9]:

$$M^*(r, z, t) = \sum_{n=1}^N C_n \Psi_n(r, z) \exp(-\gamma_n t). \tag{3}$$

em que  $\Psi_n(r, z)$  é escolhida satisfazendo a condição de contorno homogênea de modo que (3) seja solução da equação (1),  $\gamma_n$  e  $C_n$  devem ser determinados para  $n = 1, \dots, N$ .

Substituindo a equação (3) na equação (1) e após algumas operações algébricas, a seguinte equação diferencial é obtida:

$$L[\Psi_n] = \nabla^2[D\Psi_n(r, z)] + \gamma_n \Psi_n(r, z) = 0. \tag{4}$$

com  $\Psi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo a condição de contorno homogênea.

Desta forma, a solução transiente (3) conduz a um problema de autovalores. As funções  $\Psi_n(r, z)$  podem ser construídas a partir de um conjunto de funções definidas em  $\Omega$ , cada uma satisfazendo a condição de contorno homogênea, mas não necessariamente a equação (4). Elas são selecionadas de acordo com o método de Galerkin [5] da seguinte forma:

$$\Psi_n(r, z) = \sum_{j=1}^N d_{nj} f_j(r, z) \tag{5}$$

em que as  $N$  funções de base são escolhidas em um conjunto completo  $\{f_j(r, z)\}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  de funções linearmente independentes,  $f_j$  definidas em  $\Omega$ , satisfazendo a condição de contorno homogênea  $-D \frac{\partial f_j}{\partial n} = h_m f_j$ . Neste trabalho, utilizou-se as funções de base para a geometria elipsoidal e condição de contorno de terceiro tipo apresentadas em [4] na forma adimensional por:

$$f_j = f_j^* \left\{ \frac{(b^2/a^2)(1 - r^2/a^2 - z^2/b^2)}{2(b/a)[(b^2/a^2)(r^2/a^2) - r^2/a^2 + 1]^{1/2}} + \frac{1}{Bi} \right\} \tag{6}$$

onde  $a$  e  $b$  são as medidas dos semi-eixos do elipsoide,  $Bi = \frac{ha}{D}$  é chamado número de Biot de transferência e  $f_j^* = r^{m_j} z^{n_j} (B_1 r^2 + B_2 z^2 + B_3)$ ,  $j = 1, \dots, N$  e  $m_j, n_j = 0, 2, 4, 6, \dots$  são as funções de base para condição de contorno homogênea de segunda espécie.

Usando o procedimento de Galerkin, os coeficientes  $d_{nj}$  e os autovalores  $\gamma_n$  são determinados de modo que  $L[\Psi_n]$  seja ortogonal às primeiras  $N$  funções do conjunto completo. Tem-se, portanto,

$$\int_{\Omega} L\left[\sum_{j=1}^N d_{nj} f_j(r, z)\right] f_i d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{7}$$

Uma vez que os autovalores  $\gamma_n$  são determinados, os autovetores  $d_n$  associados podem ser obtidos. Para cada autovalor, obtém-se de (7) um sistema de equações algébricas cuja solução são as componentes  $d_{n1}, d_{n2}, \dots, d_{nN}$  do autovetor associado.

A solução estará completa com o cálculo dos coeficientes  $C_n$ . Para isto, aplica-se a condição inicial  $M^*(r, z, 0) = 1$  na equação (3). Analogamente à solução exata e expansão em série de Fourier, multiplica-se ambos os lados da equação resultante por  $f_i$  e integrando sobre  $\Omega$  tem-se:

$$\int_{\Omega} f_i d\Omega = \int_{\Omega} \left[\sum_{n=1}^N C_n \Psi_n(r, z)\right] f_i d\Omega. \tag{8}$$

Repetindo o processo para cada função de base  $f_i, i = 1, \dots, N$ , obtém-se de (8) um conjunto de  $N$  equações algébricas lineares que permite calcular os valores de  $C_n$ .

No problema em estudo,  $\Omega$  denota o elipsoide apresentado na Figura 1 e a integração em (7) e (8) é sobre seu volume. Assim, o teor de umidade médio adimensional é calculado da seguinte forma:

$$\overline{M^*}(t) = \frac{3}{2\pi a^2 b} \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-(r/a)^2}} M^* r dz dr d\theta. \tag{9}$$

Para simular a distribuição de umidade no interior do sólido, durante o período de têmpera, duas condições foram admitidas: (i) a distribuição de concentração no interior do sólido é conhecida no início do período de têmpera; (ii) a superfície do sólido é considerada impermeável, isto é, a concentração média no sólido é constante durante o período de têmpera. Em termos de equação matemática, a superfície do sólido será considerada impermeável (isolada) aplicando-se a condição de contorno de segunda espécie homogênea (condição de contorno de Newmann) com fluxo nulo prescrito na superfície, de tal forma que  $\frac{\partial M^*}{\partial n} = 0$  em  $S$ . Por outro lado, a condição de contorno de segunda espécie homogênea pode ser obtida da condição de contorno de terceira espécie (2) considerando-se  $h_m \rightarrow 0$ . Neste caso, para obter a solução do modelo também utilizou-se o método integral baseado em Galerkin com as funções de base adequadas para geometria elipsoide e condição de contorno de segunda espécie [4].

Neste trabalho, foi desenvolvido um código computacional na plataforma Mathematica® 7.0 para implementar o método integral baseado em Galerkin. Após análise de convergência da solução, consideramos  $N = 16$  termos da série na equação (3), que corresponde a 16 funções de base gerando matrizes de ordem  $16 \times 16$ .

### 3 Resultados e Discussão

Para prever a distribuição de umidade no interior de sólidos elipsoidais foram realizados testes de simulação de secagem contínua e intermitente. Os resultados são apresentados em função do número de Fourier ( $Fo = Dt/a^2$ ).

Tabela 1: Descrição dos testes de simulação.

| Testes | Nº de Biot | Nº de pausas | Início da têmpera ( $F_o$ ) | Fim da têmpera ( $F_o$ ) | $\Delta F_o$ |
|--------|------------|--------------|-----------------------------|--------------------------|--------------|
| T1     | 1          | 0            | -                           | -                        | -            |
| T2     | 1          | 1            | 0,018                       | 0,036                    | 0,018        |
| T3     | 1          | 1            | 0,018                       | 0,054                    | 0,036        |
| T4     | 1          | 1            | 0,018                       | 0,162                    | 0,144        |
| T5     | 5          | 0            | -                           | -                        | -            |
| T6     | 5          | 1            | 0,018                       | 0,036                    | 0,018        |
| T7     | 5          | 1            | 0,018                       | 0,054                    | 0,036        |
| T8     | 5          | 1            | 0,018                       | 0,162                    | 0,144        |
| T9     | 15         | 0            | -                           | -                        | -            |
| T10    | 15         | 1            | 0,018                       | 0,162                    | 0,144        |
| T11    | 15         | 2            | 0,018                       | 0,090                    | 0,072        |
|        |            |              | 0,108                       | 0,180                    | 0,072        |

Para a condição de contorno de terceira espécie, considera-se que o teor de umidade na superfície não atinge o valor de equilíbrio instantaneamente no início do processo de secagem. Neste caso, o teor de umidade na superfície se modifica ao longo do processo e a velocidade com que essa

variação ocorre é medida através do coeficiente de transferência de massa convectivo ( $h$ ) ou, de forma adimensional, a partir do número de Biot ( $Bi = ha/D$ ). Os resultados apresentados a seguir foram simulados considerando-se um elipsoide de razão de aspecto  $b/a = 2,0$  ( $a = 1,0\text{cm}$ ), o número de Biot finito, como descrito na Tabela 1, e o coeficiente de difusividade de massa constante  $D = 1,0 \times 10^{-5}\text{cm}^2/\text{s}$ .

Variando o período de têmpera e o número de Biot foi possível simular como se comporta o teor de umidade médio adimensional, ao longo do tempo adimensional ( $Fo = Dt/a^2$ ). Os resultados mostraram que, para  $Bi = 1,0$ , o efeito de têmpera é irrelevante no teor de umidade do sólido. Para  $Bi = 5,0$ , o efeito de têmpera começou a ser percebido com pequenas alterações na taxa de secagem, como pode ser observado na Figura 2. Destaca-se que, para número de Biot igual a 30,0, a cinética de secagem contínua começa a se aproximar do comportamento de secagem para Biot infinito, já analisada por [3].

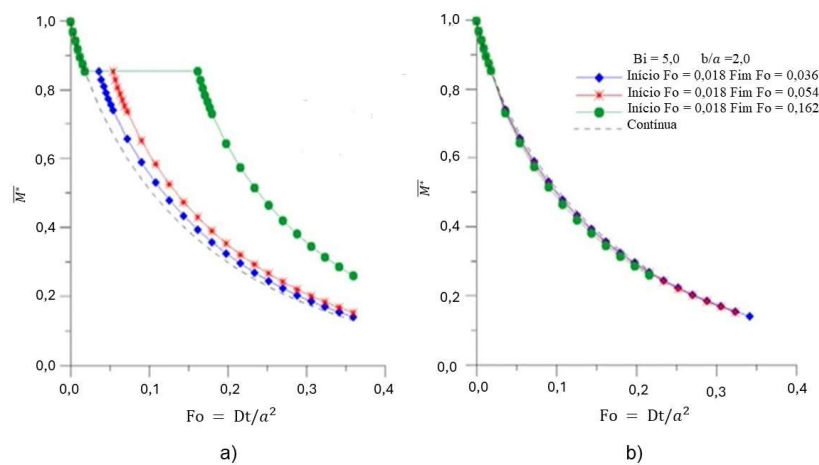


Figura 2: Efeito do tempo de têmpera na cinética de secagem de um elipsoide com razão de aspecto 2,0 para  $Bi = 5,0$ : (a) incluindo o período de têmpera; e (b) excluindo o período de têmpera (Testes T5, T6, T7 e T8). Fonte: dos autores.

A partir do modelo difusivo foi possível simular a distribuição do teor de umidade adimensional em função das coordenadas cilíndricas ( $r, z$ ), no interior de um elipsoide com razão de aspecto  $b/a = 2,0$ , para vários valores de Biot. Em todos os casos, a homogeneização de umidade no interior do sólido foi observada no final do período de têmpera. Para  $Bi = 1,0$  verificou-se que o teor de umidade no centro e na superfície já são próximos no início da têmpera, isto é, pequenos gradientes de umidade foram gerados no interior do sólido, o que justifica o efeito de têmpera ser irrelevante neste caso. Quanto maior o número de Biot, maior a quantidade de água que migra do centro para a superfície do sólido, conseqüentemente menor será o tempo necessário para completa homogeneização de umidade no material. A Figura 3 mostra a distribuição do teor de umidade adimensional em função das coordenadas cilíndricas ( $r, z$ ) no interior do elipsoide, para  $Bi = 15$ , no início e no final do período de têmpera (início em  $Fo = 0,018$  e fim em  $Fo = 0,162$ ).

O modelo desenvolvido permite a implementação de uma estratégia de secagem, a fim de prever possíveis economias de energia. A Figura 4 apresenta as cinéticas de secagem contínua e intermitente com uma pausa de  $\Delta Fo = 0,144$  e duas pausas de  $\Delta Fo = 0,072$ , para  $Bi = 15,0$ . Observa-se que as secagens intermitentes com uma e duas pausas apresentam maiores taxas de

secagem em comparação com a secagem contínua. Para o tempo adimensional  $Fo = 0,108$ , o teor de umidade médio adimensional obtido na simulação foi de aproximadamente 0,35; 0,31 e 0,28 para secagem contínua, intermitente com uma pausa e intermitente com duas pausas, respectivamente. Desta forma, a secagem intermitente com duas pausas proporcionou resultados significativamente melhores.

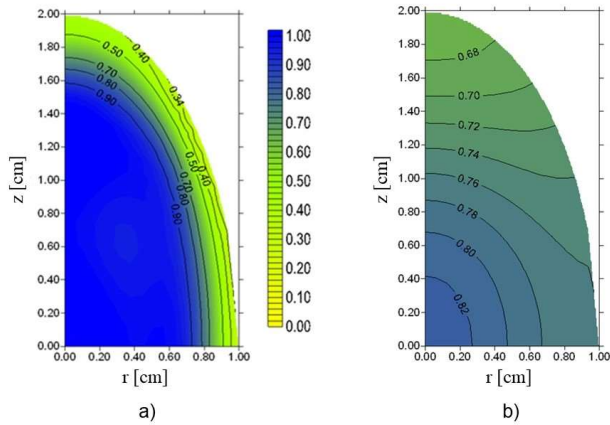


Figura 3: Distribuição do teor de umidade adimensional no interior de um elipsoide com razão de aspecto  $b/a = 2,0$  no início e no final do período de têmpera para  $Bi = 15,0$ : (a)  $Fo = 0,018$  (início) (b)  $Fo = 0,162$  (fim) (Teste T10). Fonte: dos autores.

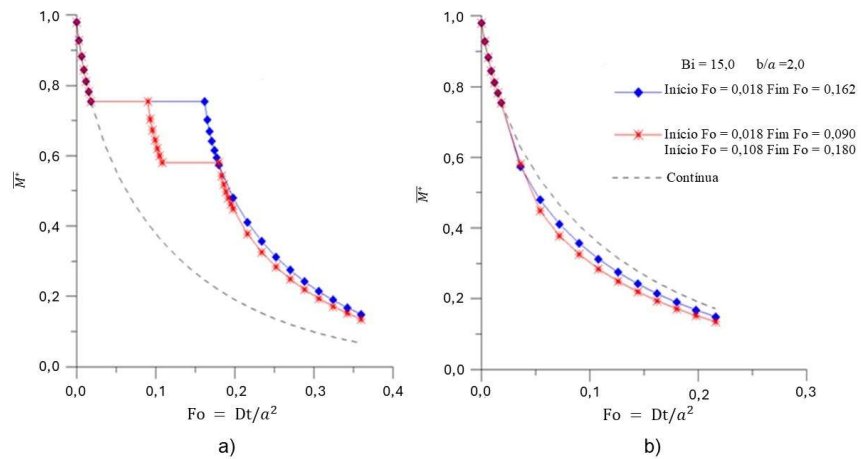


Figura 4: Efeito do número de pausas na cinética de secagem de um elipsoide com razão de aspecto 2,0 para  $Bi = 15,0$ : (a) incluindo o período de têmpera e (b) excluindo o período de têmpera (Testes T9, T10 e T11). Fonte: dos autores.

## 4 Considerações Finais

A secagem contínua e intermitente de sólidos elipsoidais foi analisada a partir da solução da equação de difusão com condição de contorno convectiva, em que o teor de umidade na superfície se modifica ao longo do processo e a velocidade com que essa variação ocorre está relacionada com o número de Biot. A partir da simulação computacional foi possível verificar que a secagem intermitente provoca redistribuição de umidade durante o período de têmpera e a quantidade de água removida por unidade de tempo de secagem é consideravelmente maior quando comparada à secagem contínua. Desta forma, pode-se acelerar a velocidade de secagem aplicando-se apenas uma pausa e aumentando a duração da têmpera. Mantendo a duração do período de têmpera e aumentando o número de pausas, é possível acelerar o processo de secagem com duas pausas quando comparado com a secagem com uma pausa, o que implica em reduzir a relação de intermitência de 1:1 para 1:2. Verificou-se que, para número de Biot menor que 5,0, o efeito de têmpera produz alterações irrelevantes no teor de umidade do sólido. Este fato é devido aos baixos gradientes de umidade, fazendo com que a migração de umidade do centro para a superfície do sólido seja minimizada. Por fim, o modelo apresentado pode ser utilizado para descrever fenômenos de difusão transiente (secagem, umidificação, aquecimento e resfriamento) em elipsoides e, como casos particulares, em esfera e cilindro infinito, variando a razão de aspecto  $b/a$ . Por exemplo, sólidos com  $b/a = 1,001$  correspondem aproximadamente a uma esfera e  $b/a = 100,0$  a um cilindro infinito.

## Referências

- [1] J. E. F. Carmo e A. G. B Lima. “Mass Transfer Inside Oblate Spheroidal Solids: Modelling and simulation”. Em: **Brazilian Journal of Chemical Engineering** 25 (2008), pp. 19–26.
- [2] C. V. Engeland, L. Spreutels, R. A. Legros e B. Haut. “Comprehensive analysis of intermittent drying. A theoretical approach”. Em: **Food and Bioproducts Processing** 131 (2022), pp. 86–101. DOI: 10.1016/j.fbp.2021.10.009.
- [3] C. M. R. Franco e A. G. B Lima. “Modelagem Matemática e Simulação Computacional da Secagem Contínua e Intermitente de Sólidos Elipsoidais”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 6 (2018), pp. 1009–1033. DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0298.
- [4] A. Haji-Sheikh e R. Lakshminarayanan. “Integral Solution of Diffusion Equation: Part 2 – Boundary Conditions of Second and Third Kinds”. Em: **Journal of Heat Transfer** 109 (1987), pp. 557–562.
- [5] A. Haji-Sheikh e M. Mashena. “Integral Solution of Diffusion Equation: Part 1 – General Solution”. Em: **Journal of Heat Transfer** 109 (1987), pp. 551–556.
- [6] A. Haji-Sheikh e E. M. Sparrow. “Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid”. Em: **Transactions of the ASME: Journal of Heat Transfer** 88 (1966), pp. 331–333.
- [7] L. S. L. Lima, W. P. Silva, J. C. A. Pereira e C. M. D. P. S. Silva. “Study of Continuous and Intermittent Drying of Pear Through Mathematical and Diffusion Models”. Em: **Journal of Agricultural Studies** 10 (2022), pp. 29–47. DOI: 10.5296/jas.v10i1.19331.
- [8] V. A. B. Oliveira e A. G. B Lima. “Mass diffusion inside prolate spherical solids: an analytical solution”. Em: **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais** 4 (2002), pp. 41–50.
- [9] F. R. Payne, C. C. Corduneanu, A. Haji-Sheikh e T. Huang. **Integral methods in science and engineering**. New York: Hemisphere, 1986.