

Uma Aplicação do Método das Soluções Fundamentais para o Dimensionamento de Sistemas de Proteção Catódica

Samuel Berger Velten¹

IFES, Aracruz, ES

José Antonio Fontes Santiago²

PEC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Renan de Souza Teixeira³ Wilian Jeronimo dos Santos⁴

PPGMMC/UFRRJ, Seropédica, RJ

Resumo. A técnica de Proteção Catódica (PC) consiste em inserir corrente na estrutura metálica através do eletrólito a fim de reduzir o potencial eletroquímico do metal. Deste modo, as regiões metálicas naturalmente anódicas se tornam catódicas, evitando a corrosão. Na prática, anodos são inseridos no eletrólito com o objetivo de manter uma distribuição de potencial uniforme sobre a superfície metálica, limitada superiormente por um valor de potencial crítico. No presente trabalho, o Método das Soluções Fundamentais (MSF) é proposto a fim de simular e avaliar sistemas de proteção catódica, a partir da resolução de um problema de potencial eletroquímico. A metodologia proposta é avaliada comparando os resultados obtidos pelo MSF com o já tradicional Método dos Elementos de Contorno (MEC), comumente utilizado para este tipo de aplicação. Uma análise bidimensional foi considerada com anodos sendo representados matematicamente como fontes pontuais, onde o MSF se mostrou eficiente e preciso quando se comparado com o MEC.

Palavras-chave. Corrosão, Proteção Catódica, MEC, MSF

1 Introdução

Para o dimensionamento de um sistema de proteção catódica é importante conhecer as distribuições de potencial e de densidade de corrente na superfície das estruturas metálicas, tais como plataformas *off-shore*, tubulações enterradas, tanques de armazenamento, navios, entre outros.

Simulações numéricas de sistemas de PC podem ser realizadas para reduzir custos através da otimização de projetos e determinação de áreas críticas para inspeção. O problema de potencial eletroquímico é governado pela equação de Poisson com condições de contorno dadas, geralmente, por relações não lineares entre o potencial e a densidade de corrente. Estas relações são denominadas curvas de polarização.

O método numérico mais usado para estimar as distribuições de potencial e de densidade de corrente sobre as estruturas metálicas é o método dos elementos de contorno (MEC). No MEC é necessário discretizar apenas as superfícies catódicas e anódicas, o que acarreta em uma melhor resolução, além de reduzir o tempo computacional quando comparado por exemplo ao Método dos Elementos Finitos. Além disso, estudos comparativos entre resultados experimentais e numéricos, obtidos através da aplicação do MEC, têm sido efetuados em diversos sistemas de proteção catódica,

¹samuel.velten@ifes.edu.br

²santiago@coc.ufrj.br

³renannovoser@gmail.com

⁴wilian@ufrj.br

envolvendo análise bi ou tridimensional, sendo observada uma boa correlação entre os resultados [1].

Os métodos sem malha (*meshless*) são técnicas novas e interessantes tanto do ponto de vista acadêmico quanto tecnológico que também podem ser utilizados para resolver problemas de proteção catódica, apesar de não haver muitas referências na literatura. O método das soluções fundamentais (MSF) [3], por exemplo, também é recomendado em problemas com meios homogêneos.

Assim como o MEC, o MSF é aplicável quando a solução fundamental da equação diferencial em questão é conhecida, com a vantagem de não necessitar de métodos de integração ou tratamento específico para as singularidades presentes nesta solução fundamental. Tal vantagem ocorre do fato de que a solução aproximada do MSF é representada na forma de uma superposição linear das soluções fundamentais, com os pontos singulares localizados fora do domínio do problema. Estes pontos singulares são chamados de fontes virtuais e formam um pseudo-contorno sem pontos em comum com o contorno real do problema.

A essência do MSF é o uso da solução fundamental que satisfaz a equação homogênea associada em qualquer ponto, exceto nos pontos singulares. Os coeficientes da superposição linear são determinados de tal modo que a solução aproximada do MSF satisfaça às condições de contorno nos pontos do contorno. Os coeficientes da superposição linear algumas vezes são chamados de intensidades das fontes virtuais.

No presente trabalho, é explorado o uso do MSF em simulações numéricas de sistemas de proteção catódica. A qualidade da aproximação do MSF é analisada usando como referência o MEC, método tradicionalmente usado neste tipo de simulação numérica.

2 Formulação Matemática

Primeiramente, considera-se o seguinte problema de valor de contorno:

$$k\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$k \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = \bar{i}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (3)$$

onde ϕ é potencial eletroquímico, k a condutividade do eletrólito, i a densidade de corrente, Ω é o domínio do problema com contorno $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

O termo não homogêneo presente na Equação (1) pode ser eliminado através do uso de uma solução particular. Com efeito, seja

$$\phi = \phi_p + \phi_h, \quad (4)$$

onde ϕ_p satisfaz a equação não homogênea

$$k\nabla^2\phi_p(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}), \quad (5)$$

mas não satisfaz necessariamente as condições de contorno (2-3) e ϕ_h satisfaz

$$\nabla^2\phi_h(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

$$\phi_h(\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\mathbf{x}) - \phi_p(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (7)$$

$$k \frac{\partial\phi_h(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = \bar{i}(\mathbf{x}) - k \frac{\partial\phi_p(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}, \mathbf{x} \in \Gamma_2. \quad (8)$$

Caso exista uma relação não linear entre ϕ e i dada por uma função $i = F(\phi)$, a solução geral do problema precisa satisfazer a seguinte condição de contorno

$$i = i_h + i_p = F(\phi_p + \phi_h) = F(\phi). \quad (9)$$

A relação não linear apresentada na Equação (9) vai resultar em um sistema de equações não lineares para o caso MEC e em um problema de mínimos quadrados não linear no caso do MSF.

2.1 Fontes Pontuais

O fato de ∇^2 ser um operador linear cria a possibilidade da equação de Poisson ser resolvida com o auxílio de uma função da solução fundamental, isto é, de uma função $\phi^*(\xi, \mathbf{x})$ que verifica a seguinte equação diferencial

$$\nabla_x^2 \phi^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{k} \delta(\mathbf{x} - \xi), \quad (10)$$

onde ∇_x^2 indica que o operador Laplaciano opera sobre a função de \mathbf{x} ficando o ponto ξ fixo e δ . Com efeito, qualquer solução particular (ϕ_p) da equação de Poisson se escreve formalmente como

$$\phi_p(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \phi^*(\xi, \mathbf{x}) b(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Considerando um sistema de proteção catódica por corrente impressa, o termo $b(\mathbf{x})$ pode ser representado matematicamente através de fontes pontuais. Neste caso, cada fonte é igual ao produto da intensidade de corrente da fonte ($P(\mathbf{x}')$) pela delta de Dirac ($\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$), onde $\mathbf{x}' = (x_a, y_a)$ denota as coordenadas de posição de cada fonte (anodo). A função $b(\mathbf{x})$, portanto, fica definida como

$$b(\xi) = \sum_{m=1}^{n_a} P(\mathbf{x}'_m) \delta(\xi - \mathbf{x}'_m), \quad (12)$$

onde n_a é a quantidade de anodos, ou fontes, inseridos no eletrólito e $\mathbf{x}'_m = (x_a^m, y_a^m)$. Assim, a Equação (11) é resolvida, ficando da seguinte maneira:

$$\phi_p(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{n_a} P(\mathbf{x}'_m) \int_{\Omega} \phi^*(\xi, \mathbf{x}) \delta(\xi - \mathbf{x}'_m) d\xi = \sum_{m=1}^{n_a} P(\mathbf{x}'_m) \phi^*(\mathbf{x}'_m, \mathbf{x}). \quad (13)$$

A solução fundamental, ou seja, a solução da Equação (10), considerando um meio infinito e um problema bidimensional, pode ser escrita como

$$\phi^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad (14)$$

onde r é a distância Euclidiana entre o ponto fonte ξ e o ponto campo \mathbf{x} .

Sendo assim, a solução particular (ϕ_p) para o caso de fontes pontuais fica da seguinte forma

$$\phi_p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi k} \sum_{m=1}^{n_a} P(\mathbf{x}'_m) \ln\left(\frac{1}{r}\right), \quad (15)$$

onde, agora, r é a distância Euclidiana entre cada ponto \mathbf{x}'_m e o ponto campo \mathbf{x} .

Além disso, pela lei de Ohm, a solução fundamental para a densidade de corrente (i^*) é dada por

$$i^*(\xi, \mathbf{x}) = k \frac{\partial \phi^*(\xi, \mathbf{x})}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}, \quad (16)$$

onde \mathbf{n} é o vetor dos cossenos diretores da normal ao contorno Γ em \mathbf{x} e, portanto, a solução particular para a densidade de corrente é expressa pela seguinte fórmula.

$$i_p(\mathbf{x}) = k \frac{\partial \phi_p}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{n_a} P(\mathbf{x}'_m) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n}. \quad (17)$$

As Equações (15) e (17) formam, respectivamente, as soluções particulares ϕ_p e i_p que satisfazem a equação de Poisson, quando são consideradas fontes pontuais.

2.2 Solução da Equação Homogênea Associada

Retomando à Equação (10), observa-se que se $\xi \neq x$, a solução fundamental obedece à equação homogênea associada, i.e.,

$$\nabla^2 \phi^*(\xi, x) = 0, \quad \xi \neq x. \quad (18)$$

Isto quer dizer que a solução fundamental satisfaz a equação homogênea em qualquer ponto, exceto no ponto fonte. A solução aproximada do MSF se baseia justamente neste fato e é dada a partir de uma combinação linear das soluções fundamentais com pontos singulares localizados fora do domínio do problema a fim de garantir a igualdade apresentada na Equação (18). Estes pontos singulares são chamados de fontes virtuais e denotados, neste trabalho, por \mathbf{x}^{fv} . Desta forma, no MSF, a solução da equação homogênea para o potencial eletroquímico pode ser escrita através do seguinte somatório

$$\phi_h(x) = \sum_{j=1}^{n_{fv}} \phi^*(x, x_j^{fv}) c_j, \quad (19)$$

onde n_{fv} é o número de fontes virtuais e os coeficientes c_j representam as intensidades das fontes virtuais desconhecidas.

De forma análoga, a solução homogênea para a densidade de corrente (i_h) pode ser dada por

$$i_h(x) = \sum_{j=1}^{n_{fv}} i^*(x, x_j^{fv}) c_j. \quad (20)$$

As soluções fundamentais ϕ^* e i^* são as mesmas definidas nas Equações (14) e (16), respectivamente. A ideia no MSF é determinar os coeficientes c_j impondo que ϕ_h e/ou i_h satisfaçam às condições de contorno correspondentes em certos nós do contorno.

No caso em que as condições de contorno são dadas por densidades de corrente prescritas, as intensidades das fontes virtuais são calculadas através da igualdade $i_h(x) = \bar{i}(x) - i_p(x)$, onde $\bar{i}(x)$ é o valor de densidade de corrente prescrita no problema geral e $i_p(x)$ precisa ser determinada usando a seguinte relação

$$i_p(x) = k \frac{\partial \phi_p(x)}{\partial n(x)}. \quad (21)$$

No caso de simulações numéricas que envolvem superfícies metálicas em contato direto com o eletrólito, a relação entre o potencial e a densidade de corrente fica sendo modelada por uma curva de polarização, ou seja, por uma relação não linear entre estas duas variáveis. Desta forma, a solução geral do problema deve satisfazer, no contorno, a curva de polarização, ou seja,

$$i_g(x) = i_h(x) + i_p(x) = F(\phi_p + \phi_h) = F(\phi_g). \quad (22)$$

A relação (22) resulta num problema de mínimos quadrados não linear com as variáveis de projeto (as variáveis de busca) definidas como as intensidades das fontes virtuais (c_j). Tradicionalmente, a função objetivo f em problemas de mínimos quadrados possui a seguinte forma especial

$$f(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{NN} (i_g^j - F(\phi_g^j))^2, \quad (23)$$

onde NN é o número de nós do contorno e $\mathbf{m} = (c_1, c_2, \dots, c_{n_{fv}})$. O objetivo é determinar os minimizadores da função f definida na Equação (23), ou seja, determinar os coeficientes c_j que garantem que a solução geral satisfaça às condições de contorno não lineares do problema em certos nós do contorno. Além dos coeficientes c_j , pode-se considerar como variável de projeto a localização das fontes virtuais, visto que a solução aproximada do MSF depende do arranjo escolhido para estas fontes.

Nas aplicações propostas neste trabalho, optou-se em usar o método de Levenberg-Marquardt (MLM) já que este é mais adequado para os problemas que envolvem matrizes Jacobianas mal condicionadas e de posto incompleto. A aplicação do MLM foi realizada usando a rotina LMDIF fornecida pelo pacote MINPACK [4].

Como já mencionado, o uso do MSF foi comparado com o MEC, cuja equação integral de contorno equivalente à equação de Laplace e às condições de contorno correspondentes pode ser escrita da seguinte maneira [2]

$$c(\xi)\phi(\xi) = \int_{\Gamma} \phi^*(\xi, x)i(x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \phi(x)i^*(\xi, x)d\Gamma(x), \quad (24)$$

onde $c(\xi)$ depende da geometria do contorno no ponto fonte ξ , sendo igual a $\frac{1}{2}$ para contornos suaves; $\phi^*(\xi, x)$ e $i^*(\xi, x)$ representam as soluções fundamentais do problema, escritas, respectivamente, nas Equações (14) e (16).

3 Resultados e Discussão

Na simulação numérica proposta, considera-se uma estrutura metálica formada por aço carbono e sua curva de polarização, determinada de forma experimental em [5], apresenta a seguinte forma

$$i(\phi) = e^{(\phi+693.91)/\beta_1} - \left[\frac{1}{i_1} + e^{(\phi+521.6)/\beta_2} \right]^{-1} - e^{-(\phi+707.57)/\beta_3}, \quad (25)$$

onde ϕ é dado por mV e i por $\mu A/cm^2$. Os parâmetros da curva de polarização $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e i_1 são dados, respectivamente, por $24 mV, 23.47 mV, 55 mV$ e $86.06 \mu A/cm^2$. A curva de polarização dada pela Equação (25) está relacionada por uma condutividade do eletrólito $k = 0.0479 \Omega^{-1}cm^{-1}$ e por um valor de potencial crítico do sistema sendo $\phi_c = -850 mV$. Nestas simulações, anodos são inseridos no eletrólito a fim de fornecer uma distribuição de potencial sobre o metal mais negativa que o potencial crítico ϕ_c .

Considera-se a região ilustrada na Figura 1, governada pela equação de Poisson. A proteção catódica é feita usando 3 anodos, representados matematicamente por fontes pontuais com intensidade de $-3000 \mu A$ cada. O contorno é representado usando 138 nós e 71 fontes virtuais.

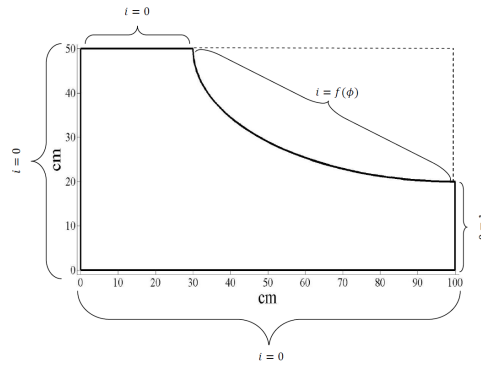


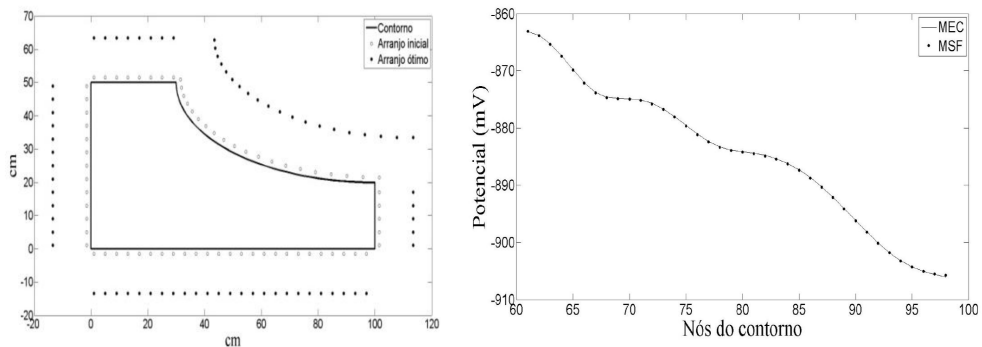
Figura 1: Hipóteses do problema.

A curva que corresponde à estrutura metálica (ver Figura 1) pode representar um arco de uma elipse e , como tal, pode ser descrita usando as seguintes coordenadas paramétricas

$$x = h + a \cos(t) \text{ e } y = k + b \sin(t), \text{ para } t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \quad (26)$$

onde (h, k) é o centro da elipse, neste caso igual a $(100 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$ e os parâmetros $a = 70 \text{ cm}$ e $b = 30 \text{ cm}$ são os semi-eixos da elipse. As 71 fontes virtuais consideradas neste exemplo estão distribuídas seguindo o contorno real do problema. Sendo assim, onde está sendo prescrito $i = 0$, ou seja, nas regiões onde a fronteira é retilínea, as fontes virtuais são paralelas aos nós do contorno, sendo distanciadas pela variável de projeto denotada por d_{fv} . Na região caracterizada pela curva de polarização, as fontes virtuais também vão pertencer a um arco de uma elipse.

Na Figura 2(a) estão ilustrados os arranjos das fontes virtuais usando a distância inicial considerada e usando a distância ótima determinada. O distância ótima determinada pelo LMDIF é de $d_{fv}^* = 13.4192 \text{ cm}$. A Figura 2(b) apresenta a distribuição de potencial na superfície metálica determinada pelo MSF e pelo MEC. O EMQ entre os valores de potencial determinados pelo MEC e pelo MSF no contorno é 0.084978 mV .



(a) Distribuição das fontes virtuais.

(b) Distribuição de potencial sobre o metal.

Figura 2: Comparação entre o MSF com o LMDIF e o MEC.

A Figura 3 apresenta os valores de potencial eletroquímico no interior estimados pelo MSF e pelo MEC. O EMQ entre estes valores estimados é de 0.1921764 mV .

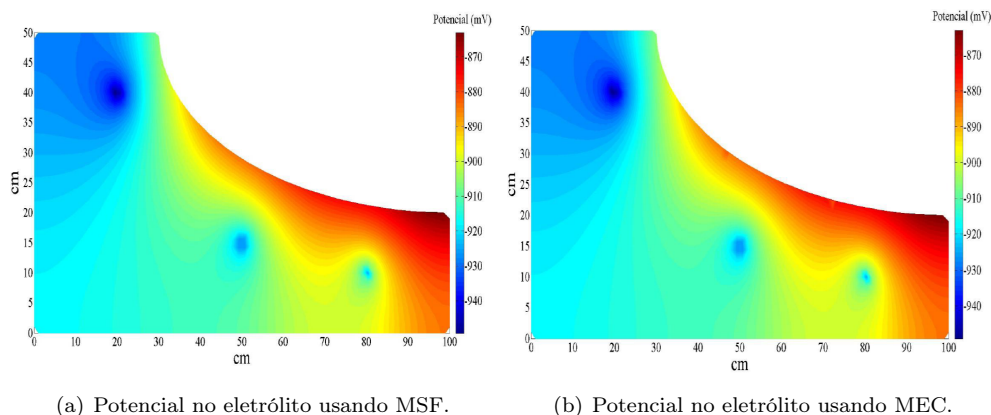


Figura 3: Comparação entre os valores de potencial no domínio.

4 Considerações Finais

Neste trabalho, uma metodologia foi proposta para avaliar o uso do MSF em simulações numéricas de dimensionamentos de proteção catódica. Considerando a aplicação numérica proposta, o MSF se mostrou capaz de estimar as distribuições de potencial eletroquímico e densidade de corrente sobre a superfície metálica a ser protegida, assim como o potencial no eletrólito, quando comparado ao MEC, método historicamente utilizado neste tipo de aplicação.

Referências

- [1] S. L. D. C. Brasil, J. C. F. Telles e L. R. M. Miranda. “On the effect of some critical parameters in cathodic protection systems: A numerical/experimental study”. Em: **Computer Modeling in Corrosion, ASTM STP 1154, R.S. Munn Ed., American Society for Testing and Materials** (1991), pp. 277–291.
- [2] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles e L. C. Wrobel. **Boundary Elements Techniques: Theory and Applications in Engineering**. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [3] V. D. Kupradze e M. A. Aleksidze. “The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems”. Em: **Computational Mathematics and Mathematical Physics** 4 (1964), pp. 82–126.
- [4] J. J. More, B. S. Garbow e K. E. Hillstrom. “User Guide for MINPACK-1”. Em: **ANL-80-74, Argonne National Laboratory** (1980). URL: <http://www.mcs.anl.gov/%5C~%7B%7Dmore/ANL8074a.pdf>.
- [5] J. F. Yan, S. N. R. Pakalapati, T. V. Nguyen e White R. E. “Mathematical modelling of cathodic protection using the boundary element method with nonlinear polarisation curves”. Em: **Journal of the electrochemical society** 139 (1992), pp. 1932–1936.