Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Kirigami e o Conjunto de Cantor como motivação para o Ensino de Progressões Geométricas

Andréa Cardoso[1] José C. de Souza Jr.[2]
ICEX/UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Ronaldo A. Lopes[3]
PPGE/UFSCar, São Carlos, SP

Resumo. Fractais podem ser inseridos em sala de aula e despertar a curiosidade e a motivação para realizar investigações, pois é possível estabelecer conexões com sequências numéricas, tais como progressão aritmética e geométrica. O objetivo desse trabalho é discutir os conceitos matemáticos envolvidos na construção de kirigami a partir do fractal conhecido como Conjunto de Cantor e apresentar os resultados da intervenção realizada junto a estudantes do Ensino Médio. Conclui-se que a atividade de construção de um cartão fractal oportunizou uma experiência estética, o desenvolvimento de percepção espacial e contribuiu para a o interesse dos estudantes por conteúdos como sequências numéricas, progressões, razão e proporção.

Palavras-chave. Ensino de Matemática, Geometria Fractal, Sequências Numéricas, Material Manipulável.

1 Introdução

A Geometria Fractal, também conhecida como Geometria da Natureza, modela certas irregularidades observadas em estruturas naturais, como árvores e plantas, cursos de rios, raios e nuvens. Na economia, modela variações da bolsa de valores. No urbanismo, pode modelar estruturas de cidades e povoados. Nas ciências, pode ser aplicada à medicina, biologia e mineralogia. Na cultura, está presente em artesanatos e penteados tradicionais africanos [6].

Fractais são gerados por meio da iteração infinita de um processo perfeitamente definido, que pode ser algébrico ou geométrico. Na iteração algébrica, são geradas figuras com o uso de uma equação ou função. Já na iteração geométrica, ocorre a subdivisão de uma figura com a aplicação de uma regra pré-definida em seu todo ou em uma de suas partes, considerando a autossimilaridade. Como a complexidade de um fractal pode ser considerada infinita, o computador é o único instrumento capaz de construir a imagem de um fractal que se aproxime razoavelmente daquilo que ele realmente é. Devido a sua simplicidade, os Fractais Geométricos, podem ser inseridos em sala de aula e despertar no aluno a curiosidade e a motivação para realizar investigações [5].

Barbosa [1] defende a potencialidade de construções geométricas fractais em aulas de Matemática, embora o tema não esteja presente no currículo, é possível estabelecer conexões com sequências numéricas, como progressão aritmética e geométrica, e também com as artes, arquitetura e diversas áreas da Ciência. Diversas pesquisas discutem a introdução de fractais para a aprendizagem de conceitos matemáticos ([11], [5], [10]). As possibilidades de abordagem dos fractais são múltiplas, com auxílio ou não de recursos digitais. A construção de fractais geométricos com dobraduras

[1]andrea.cardoso@unifal-mg.edu.br
[2]jose.souza@unifal-mg.edu.br
[3]ronaldoalopes@outlook.com

e recortes possibilita maior controle do estudantes sobre as propriedades e operações envolvidas [12]. A natureza recursiva da construção de alguns fractais geométricos bidimensionais possibilita a aplicação de uma arte tradicional japonesa conhecida como Kirigami de construir formas e objetos através do recorte de papel dobrado, dando origem a um objeto conhecido como Cartão Fractal.

A construção do Cartão Fractal também contribui para o desenvolvimento da percepção espacial, habilidade que permite perceber e se relacionar com o espaço, é essa habilidade que permite visualizar e reconhecer objetos a partir de diferentes perspectivas. Uma característica importante é perceber o entorno com suas formas, tamanhos, distâncias, volumes e movimentos para antecipar alterações no espaço. Em relação ao Ensino de Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) preconizam que devem ser desenvolvidas [...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas [3].

Assim, o objetivo desse trabalho é discutir os conceitos matemáticos envolvidos na construção de kirigami a partir do fractal conhecido como Conjunto de Cantor e apresentar os resultados da intervenção realizada junto a estudantes do Ensino Médio.

2 O Conjunto de Cantor

Fractais Geométricos são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo. Estes, possuem um padrão fixo de substituição geométrica, aplicados a cada iteração. O conjunto de Cantor (Figura 1) é um exemplo de fractal geométrico, A construção clássica do Conjunto de Cantor é realizada por retiradas sucessivas dos terços médios abertos de segmentos de reta iniciando com o intervalo fechado [0,1]. O conjunto Cantor é a figura limite da sequência de subconjuntos e não contém intervalos [9].

Figura 1: Iterações iniciais do Conjunto de Cantor. Fonte: os autores.

A soma dos comprimentos dos intervalos retirados que resultam no Conjunto de Cantor é uma série geométrica de razão $\frac{2}{3}$, dada por: $S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + ... = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$.

A medida da soma dos tamanhos dos intervalos retirados tem a mesma medida do intervalo original, portanto, o conjunto de Cantor é constituído por pontos e tem medida nula, por essa característica também é conhecido como Poeira de Cantor.

Georg Cantor, matemático nascido em 1845 na Rússia, desenvolveu a Teoria dos Conjuntos e discutiu a questão de diferentes cardinalidades de conjuntos infinitos. Nesse contexto, que ele propôs o engenhoso exemplo da Poeira de Cantor, um subconjunto da reta não-enumerável [8].

Mais tarde, em 1975, Benoit Mandelbrot resolveu um problema que a IBM enfrentava nas suas linhas telefônicas utilizadas em rede de computadores utilizando o antigo trabalho de Georg Cantor. Assim, a Poeira de Cantor pode ser considerada como o precursor dos fractais. Mandelbrot é considerado o pai da Geometria Fractal, cunhou a terminologia, utilizou algoritmos numéricos simples para visualizar as formas geométricas até então consideradas patológicas e concebeu fractal como uma figura limite.

Falconer [7] propõe uma classificação menos rigorosa para Fractais, que pode ser facilmente compreendida por estudantes do Ensino Básico. O autor afirma que um conjunto é considerado Fractal se satisfaz pelo menos algumas características. A Tabela 1 lista as características citadas e relaciona-as à Poeira de Cantor.

Tabela 1: Características fractais satisfeitas pela Poeira de Cantor.

	Características Gerais de Fractais	**Características da Poeira de Cantor**
1.	Possui detalhes em qualquer escala (complexidade infinita)	A imagem fractal possui os mesmos detalhes que o todo, admitindo um número infinito de procedimentos recursivos a serem executados.
2.	É exatamente, aproximadamente ou estatisticamente auto-similar (autossimilaridade)	Apresenta autossimilaridade exata, pois cada parte da figura é semelhante ao todo. Cada intervalo de qualquer iteração é semelhante ao intervalo original $[0, 1]$ como também a todos os outros conjuntos em todas as iterações, com razão de semelhança $\frac{1}{3}$ com o tamanho dos intervalos da iteração anterior.
3.	Possui dimensão fractal maior do que a dimensão topológica (dimensão fracionária)	A cada iteração, um segmento de reta é dividido em três partes congruentes, resultando em dois segmentos com um terço do comprimento do segmento da iteração anterior, então a dimensão fractal é: $$d = \frac{logn}{logp} = \frac{log2}{log3} \approx 0,63.$$
4.	É localmente ou globalmente muito irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional	Não pode ser descrita em linguagem da Geometria Euclidiana.
5.	Pode ser definido por um algoritmo recursivo simples	Retiradas sucessivas dos terços médios de um intervalo da reta.

Portanto, a Poeira de Cantor é um fractal, de acordo com esta classificação. A natureza fracionária de sua dimensão fractal revela que a Poeira de Cantor apresenta dimensão maior que um ponto (zero) e menor que uma reta (um).

3 Kirigami a partir do Conjunto de Cantor

Fractais podem ser construídos com o auxílio de recursos computacionais. Entretanto, é possível obter construções fractais belas por meio de dobraduras com a técnica kirigami, também conhecidos como cartão fractal.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0419

O fractal Quartil Central construído a partir de dobradura em papel e recorte tem sido abordado em alguns trabalhos, inclusive explicitando a aplicação em objetos arquitetônicos [11].

Devido a sua importância histórica e suas propriedades matemáticas, o Conjunto de Cantor foi utilizado para a obtenção de um cartão fractal, a partir de agora denominado Kirigami de Cantor, cujo protocolo de construção envolve as instruções resumidas na Figura 2.

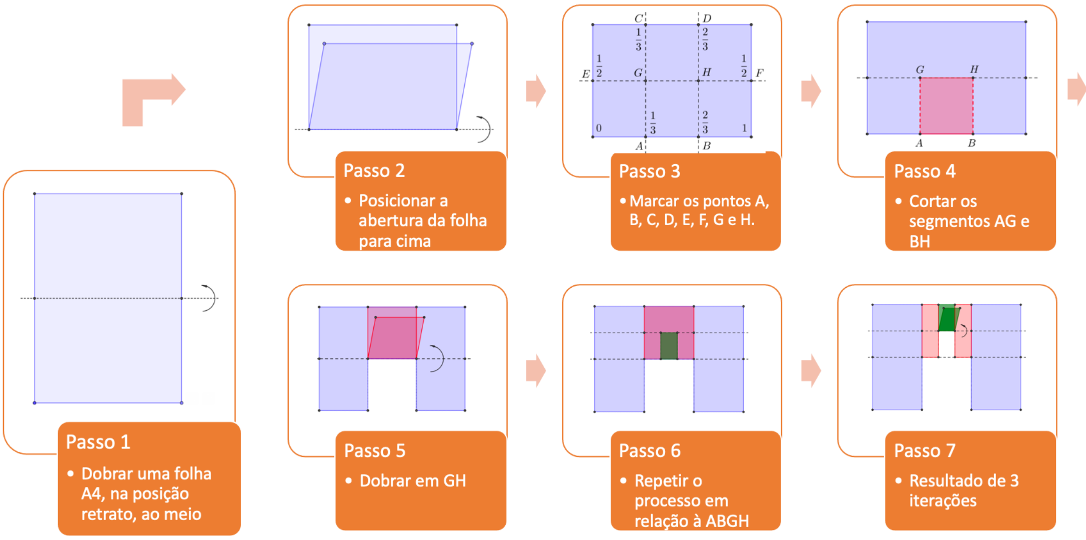

Figura 2: Passos para construção do Cartão Fractal Poeira de Cantor. Fonte: os autores.

A construção do Kirigami de Cantor pode ser realizada com o uso de régua, dividindo-se o comprimento da folha em três partes iguais, com as devidas marcações e recortes. O processo é recursivo, então por simplicidade optou-se por fazer inicialmente apenas as dobras e recortes no intervalo central, porém é possível realizar o protocolo para os intervalos menores $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ a partir do passo 5. O cartão fractal obtido a partir do protocolo é apresentado na Figura 3. Foram realizadas três iterações haja vista as limitações das dobras no papel e recortes.

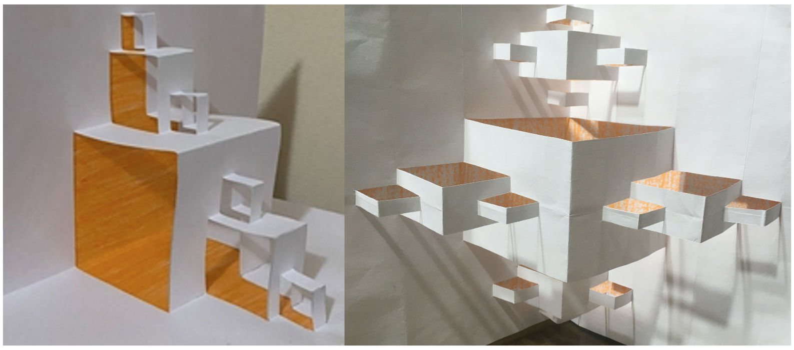

Figura 3: Kirigami de Cantor simplificado e Kirigami de Cantor com três iterações. Fonte: os autores.

A partir da construção do cartão e contagem dos elementos resultantes é possível extrapolar o número de iterações para além das limitações do papel e construir uma tabela com as iterações e o número de blocos resultantes (Tabela 2).

Tabela 2: Número de blocos na construção do Kirigami de Cantor simplificado.

Iteração	Número de blocos adicionais	Número total de blocos	Termo
1	1	1	a_1
2	2	3	a_2
3	4	7	a_3
4	8	15	a_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$a_n = 2^{n-1}$	$a_n = 2^n - 1$	a_n

A expressão $a_n = 2a_{n-1} + 1$ também poderia representar o número total de blocos após cada iteração. Entretanto, nota-se que a expressão $a_n = 2^n - 1$ não necessita do número de blocos decorrentes da iteração anterior, sendo matematicamente mais eficiente.

Neste trabalho optamos por abordar comprimentos e volumes dos blocos retangulares obtidos no Kirigami de Cantor. Os comprimentos dos blocos retangulares determinam uma Progressão Geométrica (PG) de razão $q = \frac{1}{3}$, conforme Figura 4.

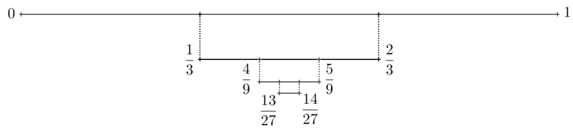

Figura 4: Iterações iniciais do Cartão Fractal. Fonte: os autores.

Nota-se que os termos da PG formada pelos comprimentos dos blocos retangulares em cada iteração é decrescente com limite zero:

$$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, ..., \frac{1}{3^n}, ...\right).$$

Outras características podem ser discutidas, como a área lateral de cada bloco retangular, ou ainda, o volume dos blocos retangulares. Sejam a e b o comprimento e a largura da folha A4, respectivamente. Ao realizar a primeira dobra para a construção do cartão fractal, temos que a largura passa a ser $\frac{b}{2}$. Considerando que o comprimento é sempre divido em três partes iguais e a largura em duas partes iguais, o volume dos blocos retangulares desse fractal também é dado por uma PG:

$$\left(\frac{1}{3 \cdot 4^2}ab^2, \frac{1}{3^2 \cdot 4^3}ab^2, \frac{1}{3^3 \cdot 4^4}ab^2, ..., \frac{1}{3^n \cdot 4^{n+1}}ab^2, ...\right),$$

cuja soma dos termos resultará no volume do sólido formado na iteração n.

4 Introdução às Sequências Numéricas com Cartão Fractal

Considerando-se que problemas envolvendo o tema fractais podem ser utilizados para introdução e desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos como perímetro, área, volume e progressões geométricas. E que a utilização de fractais em um contexto de educação básica, os geométricos se apresentam como opção válida, pois sua estética e detalhamento visual facilitam a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos em sua construção. Foi realizada uma intervenção didática como atividade do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) na Escola Estadual Samuel Engel, com aproximadamente 150 estudantes do segundo ano do Ensino Médio, cujo objetivo foi investigar as propriedades do fractal a partir da construção do Cartão Fractal e sua relação com a as progressões geométricas.

Inicialmente os estudantes foram orientados a construir o Cartão Fractal por meio da técnica kirigami, seguindo o protocolo de construção apresentado nesse trabalho. Em outro momento, os estudantes realizaram anotações sobre o número de iterações realizadas e o número de blocos retangulares resultantes em cada iteração.

Assim, a partir do número de iterações e blocos resultantes, é possível discutir com os estudantes sobre diversos conceitos matemáticos, incluindo sequências, progressões e séries, com foco algébrico ou geométrico.

A atividade de construção do cartão fractal apresentou-se como motivação para o ensino de PG, pois quando são realizadas as medições dos elementos do cartão, surgem sequências numéricas, entre elas, as progressões geométricas. As progressões geométricas aparecem no comprimento, na largura, na área e no volume de seus blocos retangulares, bem como no número de blocos decorrentes de cada iteração. Definimos bloco retangular como sendo cada "degrau"resultante das iterações realizadas durante a construção do Cartão Fractal.

Os estudantes montaram tabelas e construíram uma sequência de números, perceberam que o termo sucessor poderia ser obtido do anterior pela multiplicação de um fator constante. Chegou-se assim à motivação da definição de Progressão Geométrica como uma sequência de números reais não nulos em que o quociente entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo que o antecede é constante, essa constante é denominada razão e indicada por q. Deduziu-se o termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, e a soma dos termos da PG:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Ao final, cada turma buscou generalizar fórmulas para o cálculo do número de blocos retangulares de cada fractal e sobre a soma deles, concluindo que há formação de uma progressão geométrica.

Na habilidade EM13MAT508 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) espera-se que o estudante identifique e associe sequências numéricas a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas [2]. Assim é possível abordar fractais e suas características no segundo ano do Ensino Médio.

A atividade, ademais, por envolver a construção e análise das características dos fractais, bem como generalizações, despertou o interesse dos estudantes pela aprendizagem do tema, facilitando a compreensão sobre o termo geral e a soma da PG, permitindo, também, uma revisão sobre o tema de potenciação e medidas de grandeza em Geometria, como comprimentos e volumes. Esse conhecimento favoreceu, ainda, a resolução de questões do ENEM e das avaliações externas realizadas pelos estudantes, exames em que são recorrentes questões sobre sequências e progressões.

5 Considerações Finais

Com a intervenção didática, identificamos que o uso do cartão fractal em aulas de matemática contribui positivamente em diversos aspectos para os estudantes. Em geral, as turmas de segundo ano do Ensino Médio compreenderam que a Matemática, em especial, as progressões geométricas estão presentes no seu cotidiano e possuem diferentes aplicações no mundo real, inclusive nos próprios fractais. Também foi possível propiciar o desenvolvimento da percepção espacial.

Outros fractais também possuem características semelhantes, como a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski, porém em formato bidimensional. Por esse motivo, consideramos que o Cartão

Fractal facilitou a visualização e interação do estudante com o material construído a partir da Poeira de Cantor.

Com riqueza de detalhes e oportunizando uma experiência estética, os fractais podem ser discutidos no ensino de matemática, atraindo o interesse dos estudantes por conteúdos como sequências, progressões, razão e proporção, dentre outros [4].

Agradecimentos

Agradecemos à Escola Estadual Samuel Engel. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001.

Referências

[1] R. M. Barbosa. **Descobrindo a Geometria Fractal: para a sala de aula**. 2a. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

[2] Brasil. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2018.

[3] Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundadamental: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] J. C. Cifuentes. "Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático". Em: **Boletim GEPEM** 46 (2005), pp. 55–72.

[5] I. R. C. Côrtes. "Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática". Dissertação de mestrado. Dissertaçao de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, 2014.

[6] R. Eglash. **African Fractals: modern computing and indigenous design**. New Brunswick: Rutgers University Press, 1999.

[7] K. Falconer. **Fractal Geometry: mathematical foundations and applications**. 2a. ed. Chichester: John Willey Sons, 2003.

[8] A. F. Freitas. "Explorando o Conjunto de Cantor e outros fractais no Ensino Básico". Dissertação de mestrado. Dissertaçao (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Unesp-Rio Claro, 2014.

[9] D. V. Moura. "Introdução a Geometria Fractal". Dissertação de mestrado. Dissertaçao (Mestrado em Matemática) Universidade Federal do Piauí, 2016.

[10] M. Nascimento, S. C. R. da Silva e N. A. Maciel. "Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica". Em: **Vidya** 32.2 (2012), pp. 113–132.

[11] R. S. Santos, M. Carasek e R. M. L. Kripka. "Investigações sobre usos de padrões fractais em projetos arquitetônicos de mobiliários urbanos". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2019, pp. 010396-1–7. DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0396.

[12] C. R. Vieira. "Reinventando a geometria no ensino médio: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a teoria de Van Hiele". Dissertação de mestrado. Dissertaçao (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

