

Operações Elementares: Uma Proposta de Atividade para Cursos de Formação de Professores

Pamela J. B. Ramos¹, Paula O. Gneri², Rodolfo G. Begiato³
DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR

Resumo. Entende-se que para o professor compreender o sistema de numeração decimal de maneira que consiga propiciar situações nas quais seus alunos estabeleçam relações, descobrindo e construindo seu conhecimento, é necessário que ele, o professor, entenda que o nosso sistema de numeração é decimal, posicional, multiplicativo e aditivo. O que se propõe neste trabalho é oportunizar ao professor de educação básica uma experiência que promova um retorno à aprendizagem de sistemas de numeração para que sinta as principais dificuldades que seus alunos possam vir a ter durante o processo de aprendizagem de números e operações. Neste sentido, este trabalho traz uma exposição do sistema de numeração posicional em bases não decimais, com apontamentos para a exploração desse conteúdo em cursos de formação de professores.

Palavras-chave. Sistema de numeração; Mudança de base; Formação de professores.

1 Introdução

Ao analisar os resultados das avaliações oficiais é possível perceber que um número considerável de crianças completa o Ensino Fundamental I e ingressa no Ensino Fundamental II apresentando dificuldades básicas e conceituais em relação à escrita de números do sistema decimal e a resolução das quatro operações básicas [1]. Uma hipótese que levantamos para este efeito é a possibilidade de que os professores dos anos iniciais não tenham acedido com clareza à estrutura do nosso sistema de numeração.

A efetiva compreensão do sistema de numeração usual por parte do professor é essencial quando se busca melhorias no ensino aprendizagem das operações básicas nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Quando o professor tem claro que o nosso sistema é decimal, posicional, multiplicativo e aditivo ele consegue ter mais clareza das dificuldades encontradas pelos alunos no processo de aprendizagem. Para que haja um verdadeiro entendimento de qualquer sistema de numeração posicional, a estrutura de base deve estar clara para o professor no momento em que se trabalha as operações. Além disso, é preciso que o professor entenda as propriedades do sistema numérico usual para que compreenda e/ou desenvolva melhores estratégias para o ensino.

A formação para a matemática dos professores das séries iniciais muitas vezes não é efetiva, quer pela falta de tempo, quer pela falta de base do próprio professor que quando teve acesso a este conteúdo como aluno, acabou absorvendo-o de maneira superficial. Independente dos motivos para tal situação, é plausível avaliar que ela interfere de forma negativa na continuidade do processo educativo.

Afim de levar o professor a entender o nosso sistema de numeração de maneira plena, propõe-se então que o professor, agora estudante, faça um retorno ao seu processo de aprendizagem de

¹pamelajssika@yahoo.com.br

²gneri@professores.utfpr.edu.br

³begiato@professores.utfpr.edu.br

números e operações. No entanto, isso não seria possível se utilizada a base 10 já enraizada em nosso raciocínio o que nos impede de sentir as dificuldades encontradas em uma primeira aprendizagem e, também, de perceber alguns detalhes importantes.

Neste sentido, sugerimos que o professor-estudante conheça outras bases além da decimal e seja instigado a executar operações nessas bases. Do ponto de vista teórico, o professor-estudante será levado a questionar cada passo de uma adição, por exemplo, e não o fará de forma automática como está acostumado a fazer no sistema decimal. A prática pretende levar o professor-estudante a criar tabelas de soma/multiplicação e tabuadas para as novas bases. Pensando em uma abordagem montessoriana para o processo, um dos desafios propostos será recriar o material dourado em novas bases.

2 Sistema de Numeração Posicional

Um Sistema de Numeração é um conjunto de símbolos que junto a uma lei de formação nos permite representar qualquer quantidade. O conceito de número é abstrato, mas podemos dizer que sua ideia está associada a quantidade, ordem ou medida, ou seja, de forma simplista o número seria a quantidade que desejamos representar. O numeral é a representação gráfica (palavra ou símbolo) de um número. O algarismo é cada um dos caracteres com que se representam os números. Por exemplo, o número doze no sistema de numeração decimal é representado pelo numeral 12 e formado pelos algarismos 1 e 2, já no sistema de numeração romano é representado pelo numeral XII e formado pelos algarismos X e I.

O costume de agrupar quantidades pequenas para auxiliar na contagem de uma quantidade maior e a necessidade de representar os números com uma quantidade finita de símbolos fomentaram a criação do conceito de base numérica. A quantidade adotada para efetuar cada agrupamento é o que denominamos base do sistema de numeração.

Os sistemas de numeração posicionais são caracterizados pelo princípio de posição, segundo o qual os algarismos assumem valores relativos à posição que ocupam no numeral. Para isso, é definida uma quantidade que será a base do sistema e trabalha-se de forma que ao se atingir essa quantidade se estabeleça uma unidade de ordem imediatamente superior, daí, se estabelece o conceito de ordem no numeral. Além disso, o zero possibilitou aos sistemas de numeração posicionais, que o utilizam, superar as limitações encontradas nos sistemas precedentes, pois ao demarcar as ordens de unidades vazias, ele torna possível a plena utilização do princípio de posição sem que corramos o risco de ter representações ambíguas, isto é, ele nos permite diferenciar 25 de 250, 205 ou 2005. A junção dos conceitos de base e de posição possibilita representar qualquer número, por maior que seja, com uma quantidade finita de símbolos. Além disso, os números representados por meio deles se prestam à realização das quatro operações aritméticas básicas.

Percebe-se que, neste sistema, cada posição representa a quantidade de agrupamentos feitos a partir do número escolhido como base, por isso para se conhecer o valor posicional de um algarismo é necessário multiplicá-lo por uma potência da base, a qual depende da posição do algarismo no numeral, por isso dizemos que o sistema é multiplicativo. Além disso, também dizemos que o sistema é aditivo, pois para obter o valor representado somamos os valores posicionais que os algarismos adquirem nas respectivas posições que ocupam.

2.1 Representação na base b

Para representar os números na base b precisamos de um conjunto M de b símbolos, sendo um símbolo para o nada e um símbolo para cada quantidade menor do que b .

Quando a base é menor ou igual a dez, convenientemente podemos utilizar os símbolos do sistema de numeração decimal na representação dos números. Por exemplo: para a base 2 usamos

$M = \{0, 1\}$, para a base 7 usamos $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Caso a base seja maior que dez será preciso introduzir novos símbolos e comumente utiliza-se letras maiúsculas do nosso alfabeto. Por exemplo, para escrever os números usando um sistema de numeração de base 16, também chamado de sistema hexadecimal, usa-se $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

O Teorema a seguir garante que qualquer número natural $b > 1$ pode servir de base para um sistema de numeração posicional. Uma demonstração para este Teorema pode ser encontrado em [4], página 18.

Teorema 2.1. *Seja b um número natural e $M = \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$, com $b > 1$.*

Todo número inteiro x pode ser representado, de modo único, da seguinte maneira:

$$x = (-1)^k a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

onde $k \in \{0, 1\}$, $n \geq 0$, $a_n \neq 0$ e para cada índice i , com $(0 \leq i \leq n)$, tem-se que $a_i \in M$.

O Teorema acima garante ainda que a representação de cada número será única. No caso, o número x seria representado pelo numeral $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ se $k = 0$ ou $-a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ se $k = 1$.

Exemplo 1. *Vamos representar a quantidade abaixo em bases diferentes, para evitar confusões, utiliza-se a notação $(a)_b$ onde b indica a base utilizada e a é o numeral que representa o número em questão na base b :*

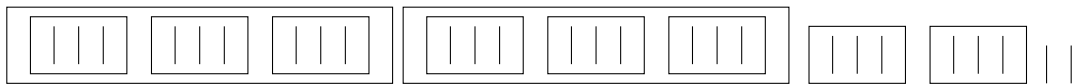


- Base 10:



Representamos como $(26)_{10}$, pois $2 \times 10 + 6$.

- Base 3:



Representamos como $(222)_3$, pois $2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$.

- Base 12:



Representamos como $(22)_{12}$, pois $2 \times 12 + 2$.

- Base 16:



Representamos como $(1A)_{16}$, pois $1 \times 16 + A$ (sendo, $(A)_{16} = (10)_{10}$).

2.2 Algoritmo das operações aritméticas

O uso constante das operações aritméticas exigiu o desenvolvimento de algoritmos compactos e rápidos. A seguir faremos uma breve descrição dos algoritmos de cada uma das operações básicas, de maneira resumida, maiores detalhes podem ser vistos em [3] ou [4].

- **Adição**

Para efetuarmos a adição de dois ou mais números devemos colocar os algarismos de ordens iguais alinhados verticalmente e começar a somar coluna por coluna (casa por casa), da menor para a maior ordem, isto é, direita para esquerda. Quando o resultado da soma for maior ou igual a $(10)_b$, o algarismo à esquerda será transportado para a coluna imediatamente superior para que seja somado com os valores desta coluna.

Exemplo 2. *Adição em outras bases:*

$$\begin{array}{r} (2 \quad {}^1 1 \quad 2)_3 \\ + \quad (\quad \quad 2)_3 \\ \hline (2 \quad 2 \quad 1)_3 \end{array} \quad \begin{array}{r} (\quad {}^1 3 \quad {}^1 6 \quad 2)_8 \\ + \quad ({}^1 3 \quad 4 \quad 5 \quad 7)_8 \\ \hline (4 \quad 0 \quad 4 \quad 1)_8 \end{array} \quad \begin{array}{r} (2 \quad 5 \quad 7)_{16} \\ + \quad (\quad 3 \quad 7)_{16} \\ \hline (2 \quad 8 \quad E)_{16} \end{array} .$$

- **Subtração**

Para a subtração de dois números também colocamos os algarismos de ordens iguais no mesmo alinhamento vertical subtrai-se coluna por coluna, novamente da menor para a maior ordem. Quando o valor a ser subtraído for maior que o valor disponível, deve-se 'emprestar' 1 da ordem imediatamente superior, que ficará com menos uma unidade, mas que ao passar para ordem imediatamente inferior, irá como $(10)_b$.

Exemplo 3. *Subtração em outras bases:*

$$\begin{array}{r} ({}^1 2 \quad {}^1 1 \quad 2)_3 \\ - \quad (\quad 2 \quad 2)_3 \\ \hline (1 \quad 2 \quad 0)_3 \end{array} \quad \begin{array}{r} (3 \quad {}^3 4 \quad {}^1 5 \quad 7)_8 \\ - \quad (\quad 3 \quad 6 \quad 2)_8 \\ \hline (3 \quad 0 \quad 7 \quad 5)_8 \end{array} \quad \begin{array}{r} ({}^8 9 \quad {}^{14} 5 \quad {}^1 7)_{16} \\ - \quad (\quad A \quad 9)_{16} \\ \hline (8 \quad A \quad E)_{16} \end{array} .$$

- **Multiplicação**

Para realizar a multiplicação de $x = (a_n \dots a_0)_b$ por $y = (c_m \dots c_0)_b$ considera-se que

$$\begin{aligned} x \times y &= (a_n \dots a_0)_b \times (c_m \dots c_0)_b \\ &= (a_n \dots a_0)_b \times (c_0)_b + (a_n \dots a_0)_b \times (c_1 0)_b + \dots + (a_n \dots a_0)_b \times (c_m 00 \dots 0)_b. \end{aligned} \quad (1)$$

Na prática, escreve-se x e, abaixo de x , o número y . Após isso, colocamos ordenadamente o resultado de cada uma das multiplicações que se encontra no lado direito da Equação (1) em linhas distintas abaixo da linha em que se encontra y . Tradicionalmente e por questão de organização, ordena-se os produtos começando com $(a_n \dots a_0)_b \times (c_0)_b$ e finalizando com $(a_n \dots a_0)_b \times (c_m 00 \dots 0)_b$, no entanto essa ordem específica não é obrigatória. Por fim, realiza-se a soma de todos os produtos encontrados.

- Apresentar exemplos onde são utilizados sistemas de numeração posicionais não decimais, tais como o sistema binário na computação, explicando os motivos que levam a utilização desse sistema em detrimento do sistema decimal.
- A segunda fase é a da orientação guiada. Nesta fase o assunto é explorado com o uso de materiais selecionados e ordenados pelo tutor, apresentados de forma que o grau de dificuldade seja crescente. Sugestões:
 - Introduzir o professor-estudante ao Material Dourado, uma ferramenta utilizada no processo de ensino-aprendizagem de origem Montessoriana [2].
 - Promover atividades de contagem utilizando muitos objetos a fim de representar em várias bases, com o objetivo de perceber que envolvam agrupamentos diferentes de 10.
 - Propor a construção ou idealização de uma versão do Material Dourado para bases diferentes de 10 e realizar a representação de números com o material elaborando. Por fim, realizar atividades de ordenação e comparação com o material desenvolvido.
 - Preparar atividades que destaquem o fato de o número ser o mesmo, o que muda é a representação e prepara atividades que explorem a importância do zero.
 - Explorar a construção da tábua da adição e da tábua da multiplicação (tabuada) de bases diferente da decimal.
- A terceira fase é a da explicitação, é o momento de oportunizar discussões em classe que irão resultar no uso correto da linguagem. Os problemas ajudam a encontrar o caminho no sistema de relações. Sugestões:
 - Discutir com a sala toda sobre as atividades anteriores, comparando as respostas e refletindo sobre as dificuldades e erros comuns.
 - Responder as perguntas da primeira fase refletindo sobre as resposta e revendo os conceitos.
- A quarta fase é a da orientação livre, nesta fase ocorre a oferta de materiais com diferentes possibilidades de uso e de instruções que favoreçam várias performances, os problemas também podem ser utilizados para testar se a integração ocorreu. Sugestão:
 - Mostrar exemplos de erros que tendem a ocorrer na representação dos números e pedir para que o professor-estudante encontre os erros e discorra sobre eles. Discutir o porquê do erro e e propor maneiras para que seja corrigido/evitado.
 - Solicitar que o professor-estudante apresente exemplos de outros erros.
 - Apresentar sequência didática para que o professor-estudante trabalhe o sistema de numeração decimal com seus alunos e propor uma análise buscando o aprimoramento desta sequência. e pedir para discorrerem sobre os erros e acertos fazendo então uma discussão com a turma sobre opções melhores.
- A quinta fase é a da integração, nessa fase o objetivo é que o professor-estudante tenha uma visão geral do conteúdo que foi trabalhado nas fases anteriores. O tutor deve auxiliar no processo de síntese, sem apresentar novas ideias.
 - Propor que seja feito um texto sintetizando os principais pontos do sistema de numeração decimal.
 - Propor a elaboração planos de aula ou uma sequencia didática sobre sistema de numeração decimal.

2.4 Conclusão

A necessidade de registrar quantidades cada vez maiores fez com que a humanidade desenvolvesse o sistema de numeração posicional que, por sua vez, permitiu a criação de algoritmos para resolução de operações cada vez mais complexas. No entanto, essa facilidade trazida pelos algoritmos modernos não deve ser confundida com a simplificação das propriedades do sistema posicional. Pelo contrário, a eficiência e a precisão dos algoritmos práticos se devem exatamente aos conceitos teóricos implícitos. A falta de conhecimento por parte do professor desses conceitos teóricos implícitos pode resultar em falhas no processo de ensino-aprendizagem das operações básicas no Ensino Fundamental I.

Em outras palavras, é importante que o futuro professor tenha um nível de conhecimento sobre o assunto superior ao nível que deseja ensinar, pois conhecer a essência e as nuances do tema a ser trabalhado em sala traz maturidade ao professor e permite propor atividades de acordo com as necessidades de cada turma e de cada aluno, quer para lidar com alunos com dificuldades quer para lidar com alunos com facilidades.

Neste sentido, este trabalho trouxe uma generalização do conceito de sistemas de numeração posicional, considerando qualquer número natural b maior do que 1 como base para o sistema de numeração. Trabalha-se a representação dos números nesta base b , bem como as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Além disso, foi apresentada uma proposta de atividades para um curso de formação de professores, baseada na teoria de fases de aprendizagem de van Hiele e que busca trabalhar o conceito de sistema posicional desde a sua essência.

Ao compreender o sistema e resolver cada uma das operações o professor, agora estudante, é levado de volta ao cenário em que se encontrou há muito tempo e ao qual cada um de seus alunos se encontrará anualmente: o da aprendizagem de uma nova operação. A tentativa de não confundir cada operação na nova base com as operações na base 10, já incrustada no raciocínio do professor-estudante, leva-o à origem teórica de cada algoritmo, forçando-o a compreender os conceitos que fazem os algoritmos funcionarem de maneira prática, eficaz e precisa.

Referências

- [1] E. H. D. Amaral. “Sistema de Numeração Decimal: Conhecimentos Profissionais e Práticas Escolares de Professores do 2º e 3º Ano do 1º Ciclo do Ensino Fundamental”. Dissertação de mestrado. UFMT, 2015.
- [2] M. Montessori. **Pedagogia científica: a descoberta da criança. Tradução de Aury Azélio Brunetti**. São Paulo: Flamboyant, 1965.
- [3] R. R. Paterlini. **Aritmética dos números inteiros. Texto para formação inicial de professores de Matemática**. Online. Acessado em 30/03/2024, <http://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/>.
- [4] P. J. B. Ramos. “Mudança de base e o ensino das operações elementares”. Dissertação de mestrado. UTFPR, 2019.
- [5] P. M. Van Hiele. **Structure and Insight. A theory of Mathematics Education**. Orlando: Academic press Inc, 1986. ISBN: 9780127141619.