

# Modelos Populacionais: Da Teoria de Lotka com o uso das Funções de Mittag-Leffler

Sandro Rodrigues Mazorche<sup>1</sup>, Thaís Souza Oliveira<sup>2</sup>  
 Departamento de Matemática-ICE/UFJF, Juiz de Fora, MG

**Resumo.** No presente trabalho, realizamos uma breve releitura da teoria de Lotka no estudo demográfico de população para o caso de crescimento populacional via funções de Mittag-Leffler. De forma direta, é apresentada a equação integral usada para o problema demográfico proposto por Lotka. Três casos serão tratados, o modelo população estável, o modelo de Malthus e o modelo de Verhulst-Pearl. Na sequência, será apresentada uma versão para o caso em que as soluções encontradas são dadas por uma família de funções de Mittag-Leffler. Por fim faremos um estudo numérico de alguns casos.

**Palavras-chave.** Modelo de Lotka, Funções de Mittag-Leffler, Modelo Logístico.

## 1 Introdução

O estudo das teorias demográficas e populacionais, potencializado pela Revolução Industrial do século XVIII, recebeu a contribuição de diversos pesquisadores, entre eles Thomas Robert Malthus, Pierre François Verhulst, Raymond Pearl e Alfred J. Lotka. O modelo malthusiano é definido por uma equação diferencial que depende do tamanho  $N$  da população e apresenta o crescimento de uma população em um determinado instante  $t$  de acordo com uma taxa de crescimento  $r$ . Este modelo não prevê um valor limitante no crescimento da população (1). O modelo Verhulst-Pearl, considera que o crescimento atingirá um limite máximo, e depende de uma taxa de crescimento  $r$  e da capacidade máxima  $N_\infty$  da população (2).

$$N'(t) = rN(t) \text{ e } N(0) = N_0 \Rightarrow N(t) = N_0 e^{rt} \quad (1)$$

$$\begin{cases} N(t)' = rN \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \Rightarrow N(t) = \frac{N_\infty}{1 + \left(\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right) e^{-rt}} = N_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right]^n e^{-rnt} \quad (2)$$

Alfred J. Lotka propôs um modelo de equação integral em que o crescimento  $N(t)$  depende do número  $B(t)$  de nascimentos de indivíduos num certo tempo  $t$  e de  $p(a, t)$  a probabilidade de sobreviver até a idade  $a$  no tempo  $t$ . Em [2, 3] Lotka explora somente a dependência desta probabilidade em  $a$ ,  $p(a)$ . Assim considerando uma população fechada, na ausência de imigração e emigração, o tamanho da população, no instante  $t$ , é calculado pela integral

$$N(t) = \int_0^{\infty} B(t-a)p(a)da. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>sandro.mazorche@ufjf.br

<sup>2</sup>thais.souza@estudante.ufjf.br

## 2 A Relação da Teoria de Lotka com três casos básicos

Por meio da equação (3), obter o valor de  $N(t)$  conhecendo as funções  $B(t)$  e  $p(a)$ , basta calcular a integral. Porém, conhecendo apenas a função  $N(t)$ , encontrar as funções  $B(t)$  e  $p(a)$  não é um processo tão simples e muito menos temos unicidade. Trataremos agora de três casos clássicos: População Estável, Modelo de Malthus e o Modelo de Verhulst-Pearl. Os dois primeiros podem ser vistos em [3] enquanto para o terceiro faremos uma adaptação.

**Caso 1: População Estacionária.** Quando uma população fechada sujeita-se a taxas constantes de fecundidade por idade e de mortalidade por idade, durante um período suficientemente longo de tempo, sua taxa anual de crescimento tenderá a ficar constante. Esta taxa constante é chamada de taxa intrínseca de crescimento natural, e a população que atinge tal estágio é uma população estável, isto é, o tamanho da população é constante para todo  $t$ . Para uma população estacionária, tem-se  $N(t) = N$  para todo  $t$ . Logo, segue que a equação (3) é

$$\int_0^\infty B(t-a)p(a)da = N, \tag{4}$$

assim uma solução para  $B(t)$ , quando  $p(a)$  é prescrito, é obtida por inspeção, ou seja,

$$B(t) = \frac{N}{\int_0^\infty p(a)da} = \frac{N}{L_0}, \text{ onde } L_0 \text{ é a duração média de vida.} \tag{5}$$

**Caso 2: Modelo de Malthus:** Uma população crescente segundo a lei de Malthus, ou seja, a velocidade de crescimento é proporcional ao tamanho da população, já que, na medida em que a população aumenta, sua velocidade aumenta em mesmo grau e  $r$  representa a taxa intrínseca de crescimento populacional, da mesma forma do caso anterior, encontramos uma solução

$$\int_0^\infty B(t-a)p(a)da = N_0e^{rt} \Rightarrow B(t) = B_0e^{rt} = \frac{N_0}{\int_0^\infty e^{-ra}p(a)da}e^{rt}. \tag{6}$$

**Caso 3: Modelo de Verhulst-Pearl.** Uma população logística é uma população que cresce conforme uma função logística de crescimento, i.e., uma população na qual a taxa de crescimento diminui segundo uma função linear da população sobrevivente tendendo, assintoticamente, a um limite superior. Este é o caso de uma população que cresce conforme a lei Verhulst-Pearl. Aqui apresentaremos uma abordagem diferente do que foi proposto em [2, 3].

$$\int_0^\infty B(t-a)p(a)da = \frac{N_\infty}{1 + \left(\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right)e^{-rt}} = N_\infty \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left[\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right]^n e^{-rnt}. \tag{7}$$

Com o auxílio de uma Série Generalizada de Dirichlet,  $B(t) = \sum_{n=0}^\infty b_n e^{-nrt}$ , onde  $b_n$  são constantes, substituindo  $B(t)$  em (7), encontramos

$$b_n = N_\infty \frac{(-1)^n \left(\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right)^n}{\int_0^\infty e^{rna}p(a)da}. \tag{8}$$

Para determinar os  $b_n$ 's, podemos, por exemplo, lançar mão da função gaussiana,  $p(a) = e^{-a^2}$ . Um fato a ser explorado nesta abordagem, é que a solução (7), pode ser expressa por meio de uma série generalizada de Dirichlet. Assim, como proposto em [4], podemos tomar como uma variação da

solução dada por (7) uma expressão baseada em série generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler dada em [4].

$$G_{\alpha,\beta}^\gamma(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(-\lambda_n u^\alpha), u > 0, \tag{9}$$

onde  $E_{\alpha,\beta}^\gamma(z)$  é a função de Mittag-Leffler de três parâmetros [7],  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\alpha \leq \beta$ .

Um dos problemas encontrados nesta abordagem, provém do fato de que as funções de Mittag-Leffler não dispõem das mesmas propriedades das funções exponenciais, dificultando o estudo de soluções analíticas por meio do modelo de Lotka. Já que algumas manipulações algébricas propostas por Lotka [2, 3], não podem ser reproduzidas, como é possível observar que

$$E_\alpha(-rnt^\alpha) \neq E_\alpha(-rt^\alpha)^n. \tag{10}$$

Ainda assim, é possível observarmos numericamente o comportamento do modelo de Lotka munido das funções de Mittag-Leffler, e compará-lo ao comportamento do modelo na sua forma clássica. O modelo utilizando a Série Generalizada por Mittag-Leffler assemelha-se ao original e segue a proposta de um modelo de crescimento populacional logístico considerando um limite máximo de crescimento, como visto nas equações abaixo e nos gráficos. ( $N_1(t)$  é dada por (7)).

$$N_2(t) = N_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{N_\infty}{N_0} - 1 \right]^n E_\alpha(-rnt^\alpha), \quad N_3(t) = N_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{N_\infty}{N_0} - 1 \right]^n E_\alpha(-rt^\alpha)^n. \tag{11}$$

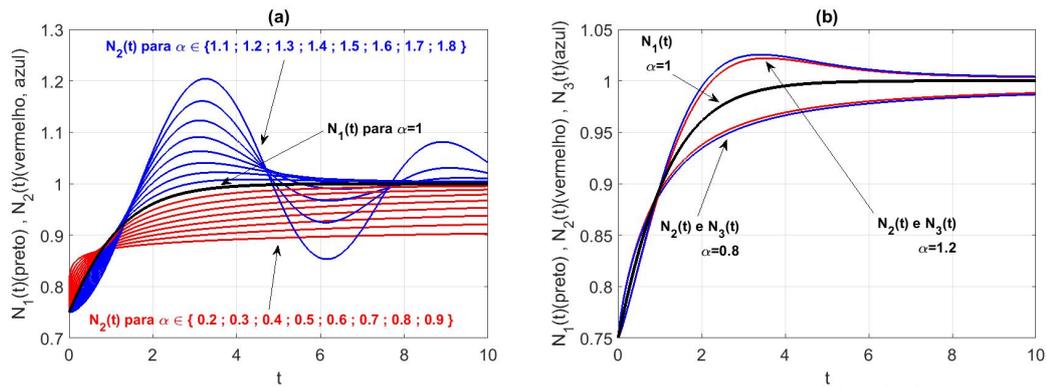


Figura 1: Foram usados  $N_\infty = 1$ ,  $N_0 = 0.75$  e  $r = 1.05$  nas expressões (7) e (11). Fonte: Autor.

Como vimos, pela teoria de Lotka é possível construir por meio das funções  $B(t)$  e  $p(a)$  as soluções de vários casos clássicos de dinâmica populacional. Portanto, agora vamos propor uma construção de modelo baseado em Lotka e na ideia de um modelo para uma população quase-estável, que é uma população que anteriormente foi estável com fecundidade constante e mortalidade gradualmente variável. A ideia da mortalidade gradualmente variável é crucial, pois pediremos que a média de vida dependa do tempo, ou seja  $p(a, t)$  como função do tempo,  $t$ .

### 3 Uma proposta de solução usando Funções de Mittag-Leffler

Existem vários fatores que influenciam no tamanho de uma população, como, por exemplo, as taxas de nascimento e mortalidade, mas é claro que fatores como o meio onde vivem, a qualidade de vida, acesso à saúde, alimentação, desenvolvimento tecnológico e cultural, etc. são fatores que prolongam a vida(longevidade) dos indivíduos de uma população. Desta forma, iremos propor um modelo baseado no modelo de uma população semi-estável, mais precisamente, em que a média de vida varia com o passar do tempo. Isso é plausível, pois, quando olhamos para 200, 500, 1000 anos atrás, vemos fatos que alteraram a expectativa de vida da população, seja por meio das guerras,

pragas, colonização de regiões, alterações climáticas, fatos estes que aumentam ou diminuem a expectativa de vida de uma população.

Na Roma Antiga, era comum uma pessoa vir a óbito quando alcançava a casa dos trinta anos. Passando para o período medieval, existem diversos registros que nos levam à conclusão de que quase metade dos recém-nascidos acabava falecendo. Comparativamente, a expectativa de vida de um indivíduo nascido nos períodos Antigo e Medieval era impressionantemente similar à do Homem de Neanderthal, que possivelmente habitou a Terra cerca de 350 mil anos atrás. Essencialmente, a estabilidade destes números esteve ligada ao desenvolvimento de novos hábitos de higiene do homem, alimentação, avanços na qualidade de vida, sistema de saúde melhor, etc.

Desse tempo para cá, vários outros estudos conseguiram decifrar outros meios para que o homem pudesse retardar o seu próprio fim. Nos anos de 1950, houve a descoberta e o consequente combate aos chamados radicais livres, compostos moleculares que contribuía no processo de envelhecimento das células. Recentemente, novas pesquisas conseguiram atribuir o processo de envelhecimento a um determinado gene PHA-4, que reduz a injeção de glicose nas células.

Contudo, isso não quer dizer que a possibilidade de extensão da vida seja algo real e acessível a todo e qualquer indivíduo. Enquanto países desenvolvidos como Andorra oferecem uma expectativa de vida de 83,5 anos para cada habitante, outras nações paupérrimas, como Botsuana, têm uma expectativa na casa dos 30,9 anos.

A esperança de vida praticamente triplicou ao longo da história da humanidade e claro veio com um crescimento oscilatório ao longo dos séculos. Assim, nos faz pensar em hipóteses para a descrição do nosso modelo populacional. A princípio, para simplificar as ideias, vamos supor, que a quantidade de nascimentos de indivíduos seja mantido constante ao longo do tempo e é a vida média que altera ao longo do tempo, vamos propor que  $B(t) = B_0$  seja constante e a probabilidade de sobrevivência  $p(a, t)$  dependa de  $t$ .

### 3.1 A função $p(a, t) = e^{-a\lambda(t)}$ e os tipos de $\lambda(t)$ .

Iniciaremos nossos estudos, tomando como base a distribuição exponencial, para propor a função  $p(a, t)$  que fornece uma probabilidade de uma pessoa estar viva com a idade  $a$  no tempo  $t$ .

$$p(a, t) = e^{-a\lambda(t)} \quad , \quad \text{onde} \quad (a, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ . \quad (12)$$

Aqui iremos pedir que  $p(a, t)$  satisfaça algumas propriedades, como:

$$p(0, t) = 1 \quad , \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} p(a, t) = 0 \quad , \quad p(a, 0) = e^{-a\lambda_0} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p(a, t) = e^{-a\lambda_\infty} . \quad (13)$$

A função  $\lambda(t)$  é uma função estritamente positiva e limitada ( $0 < \lambda_1 \leq \lambda(t) \leq \lambda_2$ ), da equação (4)

$$\int_0^\infty p(a, t) da = \int_0^\infty e^{-a\lambda(t)} da = \frac{1}{\lambda(t)} - \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{-a\lambda(t)}}{\lambda(t)} = \frac{1}{\lambda(t)} , \quad (14)$$

segue a duração média de vida, que satisfaz

$$\frac{1}{\lambda_2} \leq \int_0^\infty e^{-a\lambda(t)} da \leq \frac{1}{\lambda_1} , \quad (15)$$

e desta forma é como se a solução do caso 1: População Estacionária, (4), funcionasse como delimitadores para uma solução dada por Lotka (3), onde  $N(t) = \frac{N}{\lambda(t)}$ , com  $B(t) = N$ . Ficando assim, entre duas soluções estacionárias, ou seja,  $\frac{N}{\lambda_2} \leq \frac{N}{\lambda(t)} \leq \frac{N}{\lambda_1}$ . Vamos definir  $\lambda(t)$  como uma combinação da função unitária e uma família de funções de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

$$\lambda(t) = 1 + bt^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-rt^\alpha) , \quad (16)$$

onde  $E_{\alpha,\beta}(-rt^\alpha)$  é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, [7].

Apresentaremos agora uma sequência de gráficos para algumas variações de  $\lambda(t)$ , onde usaremos  $b = 1/3$ ,  $r = 1.05$  e os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  serão indicados nas figuras.

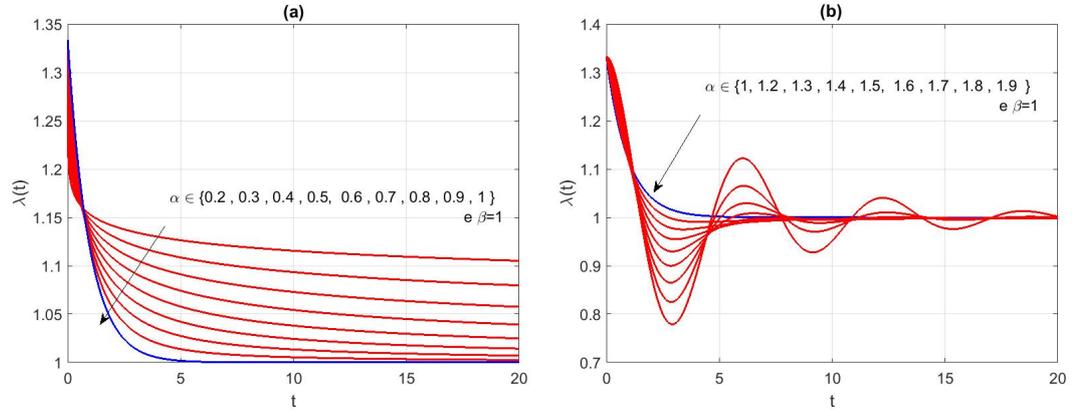


Figura 2: Casos de  $\lambda(t)$ . Fonte: Autor.

A Figura 2 (a) retrata uma variação decrescente de  $\lambda(t)$  ao longo do tempo, para vários valores de  $\alpha$ , o que indica que a expectativa de vida está aumentando e quando  $t \rightarrow \infty$  temos que  $\lambda(t) \rightarrow 1$ . Em azul,  $\alpha = 1$ , o caso exponencial clássico. Para a Figura 2 (b) temos o caso oscilatório, que é uma das características da função de Mittag-Leffler com  $1 < \alpha < 2$ , a oscilação aumenta à medida que  $\alpha$  se aproxima de 2. Enquanto  $\alpha < 2$  temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 1$ .

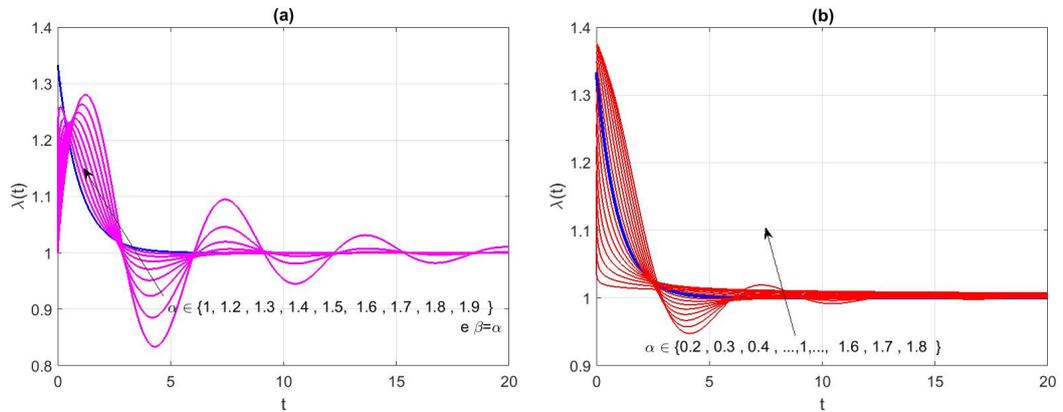


Figura 3: Casos de  $\lambda(t)$ . Fonte: Autor.

A Figura 3 (a), mostra um caso interessante para  $\lambda(t)$ , segue que  $\lambda(0) = 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ . Já a Figura 3 (b) retrata uma situação diferente para a proposta da expressão (16), usamos para este caso  $\lambda(t) = 1 + bE_{\alpha,\alpha}(-rt^\alpha)$ . E pode-se notar que o comportamento é similar aos dos casos da Figura 2 (a) e (b).

#### 4 Resultados Numéricos para $N(t)$ .

Apresentaremos alguns resultados numéricos, para a equação de Lotka (3), com  $B(t) = N_\infty$  e  $p(a, t) = e^{-a\lambda(t)}$  onde  $\lambda(t)$  foi retratado nas Figuras 2 e 3. Usaremos ainda,  $r = 1.05$  e  $b =$

$\left(\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right)$  com  $N_\infty = 1$  e  $N_0 = 0.75$ . Para os gráficos, usamos o código descrito em [1].

$$N(t) = \int_0^\infty B(t-a)p(a,t)da = N_\infty \int_0^\infty e^{-a\lambda(t)} da = \frac{N_\infty}{\lambda(t)} = \frac{N_\infty}{1 + \left(\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right) t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-rt^\alpha)} \quad (17)$$

Observe que para  $\beta = 1$  e  $\alpha = 1$  temos o caso clássico do modelo de Verhulst-Pearl, como pode ser visto nas Figuras 4 - 5 (a) e (b) em azul. Para  $\beta = 1$  e  $\alpha < 1$  a função de Mittag-Leffler é uma generalização da exponencial, dando um efeito similar ao clássico, Figura 4 (a). Quando  $\beta = 1$  e  $\alpha > 1$  segue um efeito oscilatório com um decaimento algébrico do tipo  $t^{-\alpha}$  que é um efeito típico das funções de Mittag-Leffler, Figura 4 (b).

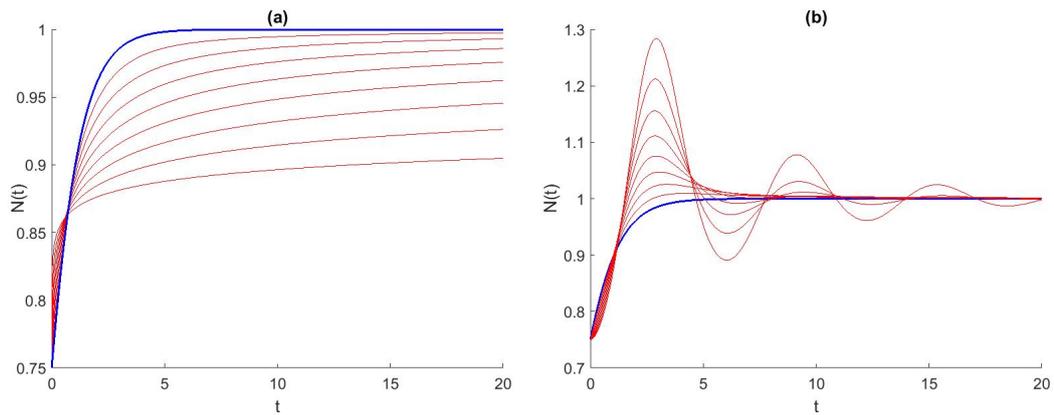


Figura 4: Exemplos de  $N(t)$ . Fonte: Autor.

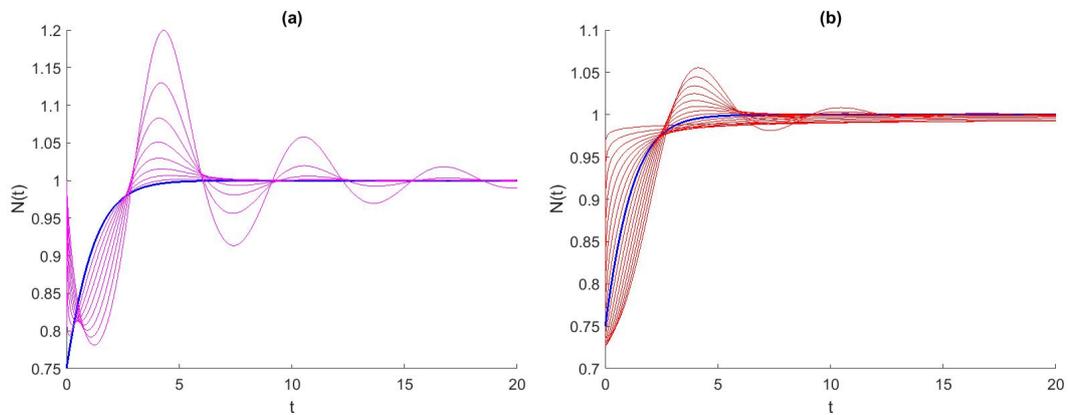


Figura 5: Exemplos de  $N(t)$ . Fonte: Autor.

Para a Figura 5 (a),  $\alpha > 1$  e  $\beta = \alpha$  segue um efeito oscilatório com um decaimento algébrico do tipo  $t^{-\alpha}$  e ainda temos uma situação interessante, pois em  $t = 0$  temos que  $N(0) = N_\infty$  dando um efeito bem próximo da ideia de população quase-estável, pois se inicia com o tamanho da população estável, sofre alterações na expectativa de vida média ao longo do tempo, o que acarreta uma alteração no tamanho da população, mas retorna à situação estável ao final,  $t \rightarrow \infty$ .

Para a Figura 5 (b) usamos  $\lambda(t) = 1 + \left(\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right) E_{\alpha,\alpha}(-rt^\alpha)$ , vemos um movimento interessante, pois, para  $\alpha < 1$  o crescimento  $N(t)$  da população é mais rápido que o caso clássico no início, porém depois o crescimento se torna lento e abaixo da população limite e indo lentamente

para  $N_\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Já para  $\alpha > 1$  o comportamento inicial corresponde a um crescimento lento, abaixo do caso clássico, porém depois de um certo tempo, ultrapassa o valor limite e segue com uma oscilação e tende a  $N_\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

## 5 Considerações Finais

Esta abordagem é o início de uma nova releitura das ideias de Lotka incluindo o uso das funções de Mittag-Leffler. Entendemos que será um grande ganho nas possibilidades de soluções obteníveis, pois, ao usá-las para obter soluções, ganhamos mais parâmetros, que poderão ajustar melhor a situações reais do que a abordagem tradicional.

A iniciativa de partir de um modelo populacional estacionário, mesmo sabendo que é uma situação bem restritiva do crescimento, permitiu introduzir as funções de Mittag-Leffler na função da probabilidade,  $p(a, t)$ , de sobrevivência até a idade  $a$  dependendo do tempo  $t$ , que foi pouco explorado por Lotka, [2, 3]. O que é algo bem pertinente, como podemos observar ao longo dos tempos, situações que impactam diretamente na expectativa de vida.

Dos casos relatados para  $\lambda(t)$  e as respectivas soluções  $N(t)$  associadas a eles, vimos que é possível explorar situações mais abrangentes que a do caso clássico, como crescimento típico logístico, porém com oscilações.

Ainda tem muito por fazer e explorar, como, por exemplo, aplicar esta técnica em situações reais, onde possamos executar uma calibragem do modelo calculando parâmetros típicos das funções de Mittag-Leffler,  $\alpha$  e  $\beta$ . Por fim, mais desafiador seria buscar uma construção, por meio da equação (3) e da teoria descrita em [5, 6], de uma equação diferencial fracionária associada a estas soluções o que realmente seria algo muito interessante.

## Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pós-graduação e Pesquisa da Universidade Federal de Juiz de Fora, por apoiar nossa pesquisa por meio de uma bolsa PIBIC.

## Referências

- [1] R. Garrappa. “Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions”. Em: **SIAM J. Numer. Anal.** 53 (3 2015), pp. 1350–1369. DOI: 10.1137/140971191.
- [2] J. A. Lotka. **Analytical Theory of Biological Populations**. Springer Science+Business Media. Plenum Press, New York, 1998. ISBN: 978-1-4757-9178-5.
- [3] J. A. Lotka. “Biometric Functions in a Population Growing in Accordance With a Prescribed Law”. Em: **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America** 10, Vol. 15 (1929), pp. 793–798. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.15.10.793>.
- [4] M. T. Mendonça e S. R. Mazorche. “Flutuações no Brilho da Via Láctea: Da Teoria de Ambartsumian ao Caso Fracionário”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2023. DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0055.
- [5] N. Z. Monteiro, R. W. dos Santos e S. R. Mazorche. “Bridging the gap between models based on ordinary, delayed, and fractional differential equations through integral kernels”. Em: vol. 121. 19. 2024, pp. 1–11. DOI: 10.1073/pnas.2322424121.
- [6] N. Z. Monteiro, R. W. dos Santos e S. R. Mazorche. “Constructive fractional models through Mittag-Leffler functions”. Em: vol. 43. 177. 2024, p. 26. DOI: 10.1007/s40314-024-02680-z.
- [7] E. C. Oliveira. **Solved Exercises in Fractional Calculus**. Volume 240. São Paulo: Springer, 2019. ISBN: 978-3-030-20524-9.