

Dificuldade Numérica na Solução do Sistema do Memristor

Messias Meneguette Junior¹, Marcelo Messias²

DMC FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP

Resumo. O estudo de sistemas dinâmicos, como pode ser acompanhado na literatura, é bastante teórico, mas com forte apoio computacional. Investiga a presença de comportamentos caóticos, analisa o comportamento de soluções na proximidade de pontos especiais, o aparecimento de órbitas periódicas, atratores estranhos, entre alguns aspectos de interesse. Nas simulações o mais comum é a utilização de métodos clássicos para a integração do sistema de equações diferenciais que modela o problema em questão. Mais usados são os esquemas com controle de passo e ordem, a rotina rkf45 com dois métodos Runge-Kutta de ordens 4 e 5 e a rotina dverk78 com ordens 7 e 8. Devido à sensibilidade das soluções sob algum conjunto de parâmetros, existe advertência na literatura em relação a certos cuidados. O problema de Van der Pol com parâmetro $\mu > 2$ exige a utilização de esquema com estabilidade especial; sistemas caóticos, em geral, são computacionalmente ainda mais exigentes. Consideramos neste trabalho o sistema de equações diferenciais que modela o circuito de Chua, no qual foi incluído um componente novo, o memristor; para simplificar dizemos então sistema do memristor. Vamos explorar mais detalhadamente o fato, ainda não conhecido na literatura, que este sistema mostra dificuldade numérica muito significativa, pois os diversos métodos usados em sua resolução produzem soluções espúrias teoricamente não permitidas.

Palavras-chave. Métodos para EDO, Dificuldades Numéricas, Sistema do Memristor, Soluções Espúrias.

1 Introdução

O interesse no comportamento dinâmico de muitos problemas práticos tem estimulado sobremaneira o estudo e solução de sistemas de equações diferenciais, incluindo os não lineares e também aqueles com dinâmica caótica. Este tema atual tem importância tanto do ponto de vista teórico como aplicado. O apoio computacional está sempre presente nos estudos por meio das simulações numéricas viabilizadas por esquemas de integração do sistema de equações em questão [4, 7].

Entretanto, como bem explicitado em [7], sempre existiu preocupação em respeito à dúvida: se a dinâmica caótica existe ou é o resultado de erros computacionais na modelagem numérica.

O estudo de sistemas dinâmicos, como pode ser acompanhado na literatura, investiga a presença de comportamentos caóticos, analisa o comportamento de soluções na proximidade de pontos especiais, o aparecimento de órbitas periódicas, atratores estranhos, entre alguns aspectos de interesse. Nas simulações o mais comum é a utilização de métodos clássicos para a integração do sistema de equações diferenciais do problema. Mais usados são os esquemas com controle de passo e ordem, a rotina rkf45 com dois métodos Runge-Kutta de ordens 4 e 5 (cf.[3]) e a rotina dverk78 com ordens 7 e 8. Devido à sensibilidade das soluções sob algum conjunto de parâmetros, existe advertência na literatura em relação a certos cuidados. O problema de Van der Pol com parâmetro $\mu > 2$ exige a utilização de esquemas com estabilidade especial; sistemas caóticos, em geral, são computacionalmente ainda mais exigentes [1, 4].

¹messias.meneguette@unesp.br

²marcelo.messias@unesp.br

Consideramos neste trabalho o sistema de equações diferenciais que modela o circuito de Chua, composto de três elementos: indutor, capacitor e memristor (cf. [5]); para simplificar dizemos então sistema do memristor. Vamos explorar mais detalhadamente o fato, ainda não conhecido na literatura, que este sistema mostra dificuldade numérica muito significativa, pois os diversos métodos usados em sua resolução produzem soluções espúrias teoricamente não permitidas.

2 Dificuldades Numéricas

O estudo dos métodos numéricos para equações diferenciais construiu ao longo de algumas décadas um arcabouço de conhecimento bastante sólido e consistente. Os principais elementos a serem considerados são tamanho de passo, ordem de consistência, convergência e estabilidade. Em geral utilizamos a precisão dupla para os cálculos; problemas rígidos exigem aumento na precisão interna [4].

Problemas com variação rápida em uma das componentes da solução impõem um tamanho de passo muito restritivo e, portanto, o uso de métodos com boas propriedades de estabilidade se torna essencial, principalmente quando o tempo de integração é longo (vide [1]).

Implementações sofisticadas dos métodos usuais são disponibilizadas nas plataformas Matlab, Maple e Mathematica. Em nossas investigações o Maple é a plataforma que se mostrou mais prática e que permite a especificação da precisão interna de forma simples; por exemplo `Digits:=10` estabelece o tamanho usual de dígitos usados nos cálculos [4].

O Maple disponibiliza uma gama ampla de métodos, dentre os quais utilizamos:

- **rkf45** - métodos acoplados com controle de ordem via passo variável, ordem 4 nos resultados [3];
- **dverk78** - métodos acoplados com controle de ordem via passo variável, ordem 7 nos resultados;
- **ck45** - esquema de Cash-Karp, detecta frentes de crescimento rápido, 4 é a ordem máxima [2];
- **classical[rk3]** - método Runge-Kutta de ordem 3 (pode perder ordem se tempo é longo);
- **classical[foreuler]** - método de Euler com passo constante e ordem 1;
- **rosenbrock** - método com estabilidade especial, ordem 3.

Outras dificuldades numéricas estão presentes no caso de sistemas dinâmicos que, em geral, são muito sensíveis em relação às condições iniciais. As condições de instabilidade e estabilidade dos pontos especiais podem levar a bifurcações, atratores, soluções que crescem indefinidamente e, muitas vezes, a presença de superfícies invariantes aumentam a dificuldade na obtenção das soluções e de boa representação do retrato de fase. Essas particularidades introduzem condições extremamente refinadas na parte computacional (talvez requerendo maior precisão para os cálculos internos), levando de forma natural ao questionamento mencionado por [7] (Vide também [5]).

A dificuldade a ser apresentada na próxima seção não foi detectada por ocasião da formulação do sistema do memristor. Ela foi explicitada como consequência de um estudo teórico em [5].

3 Soluções Numéricas para o Sistema do Memristor

O sistema do memristor é dado por 3 equações diferenciais ordinárias (cf. [5]).

$$\dot{x} = -x(y + \beta), \quad \dot{y} = -\omega z - \alpha(x^2 - \mu)y, \quad \dot{z} = \omega y, \quad (1)$$

com $\alpha, \beta, \mu, \omega \in \mathbb{R}$ parâmetros de controle, x, y e z variáveis de estado, que são proporcionais aos estados internos do memristor, corrente e voltagem do circuito, respectivamente, e o ponto denota derivada com respeito ao tempo t . Os parâmetros α, β, μ e ω serão considerados todos positivos.

Os estudos em [5] mostraram:

1. O sistema (1) é simétrico em relação ao plano $x = 0$, para todos os parâmetros $\alpha, \beta, \mu, \omega \in \mathbb{R}$.
2. O plano $x = 0$ é invariante com fluxo linear e a origem é o único ponto de equilíbrio.
3. Para $\alpha, \beta, \mu, \omega > 0$ a origem é nó instável se $0 < \omega \leq |\alpha\mu|/2$ e um foco instável se $\omega > |\alpha\mu|/2$.

A Figura 1 mostra a origem como um foco instável e sua variedade unidimensional global estável é dada pelo eixo x e a bidimensional global instável é o plano $x = 0$, onde o fluxo é linear.

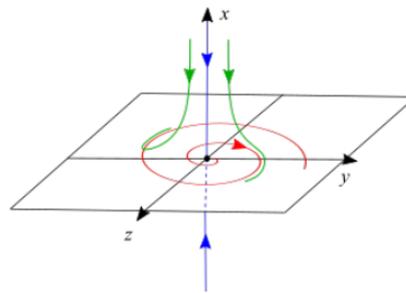


Figura 1: Comportamento local na origem quando ela é um equilíbrio tipo sela-foco. Fonte: [5]

No caso em que o sistema (1) tem uma sela-foco na origem, como mostrado na Figura 1, as simulações numéricas devem sugerir que pode estar presente um comportamento dinâmico bastante complexo, exibindo um atrator estranho nas proximidades da origem (cf. [5]).

Assim, nossas simulações consideram os seguintes parâmetros: $\alpha = 0.1, \beta = 5, \omega = 0.5$ e $\mu = 0.7$, que tornam a origem um equilíbrio tipo sela-foco, formando um atrator caótico. É preciso observar que, sendo o plano $x = 0$ invariante, uma solução iniciada em $x > 0$ deve permanecer em $x > 0$, ou seja, ela não pode cruzar o plano invariante.

Para o estudo numérico do sistema do memristor, vamos utilizar a plotagem do resultado obtido em cada método citado anteriormente. O usual é esperar que métodos com ordem mais alta e controle de passo e ordem forneçam melhores resultados.

A abordagem numérica seguirá as seguintes etapas:

1. Escolha do passo - `stepsize:=0.01`
2. Diminuição do passo para verificação da convergência, `stepsize:=0.001`
3. Aumentar a precisão dos cálculos internos, `Digits:=20`
4. Análise dos resultados, as causas de um método funcionar ou não.

Assim, tomamos `stepsize:=0.01`, intervalo de tempo, `range:=0..300` e condição inicial $[x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1]$ e $[x(0) = -1, y(0) = 1, z(0) = 1]$.

O comando Maple para cálculo e plotagem se mantém o mesmo, sendo repetido apenas com a escolha diferente do método, `method:=rkf45` ou `method:=deverk78`, e assim por diante.

```
> with(DEtools): with(plots):
> alpha := 0.1; beta := 5; omega := 0.5; mu := 0.7;
> DEplot3d(diff(x(t), t) = -x(t)*y(t) + beta, diff(y(t), t) = -omega*z(t) - alpha*(x(t)^2 -
mu)*y(t), diff(z(t), t) = omega*y(t), [x(t), y(t), z(t)], t = 0..300, [[x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) =
1], [x(0) = -1, y(0) = 1, z(0) = 1], maxfun = 99999999, stepsize = 0.01, linecolor =
[blue, red], thickness = 1, axesfont = [13, 13, 13], labelfont = [13, 13, 13], method = rkf45);
```

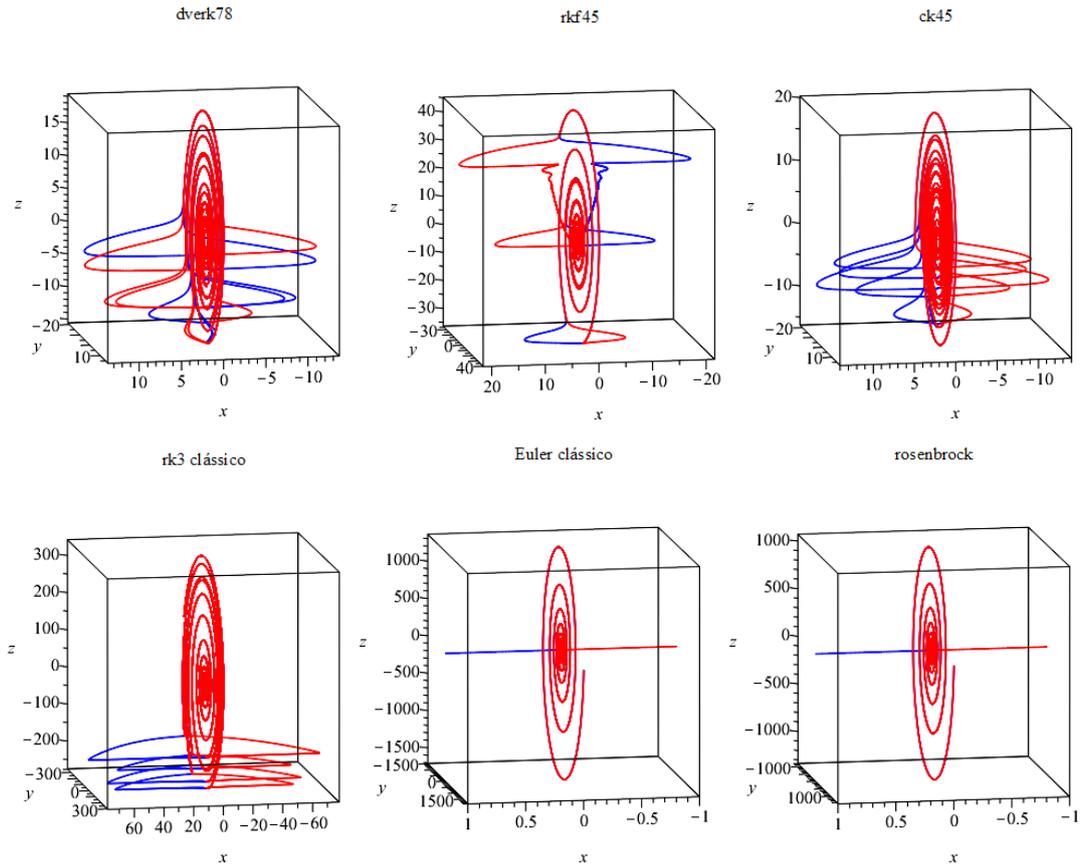


Figura 2: Resultado dos métodos, com stepsize=0.01.

As Figuras 2 e 3 mostram os resultados com Digits:=10 e passo 0.01 e 0.001, respectivamente; praticamente não houve variação nos resultados, como já esperado. Nota-se claramente o cruzamento do plano invariante contrariando a análise teórica; apenas o método ck45 forneceu solução que não cruza o plano e possui valores mais adequados. Os métodos de passo fixo e baixa ordem não forneceram valores e comportamento da solução teórica razoáveis.

A Figura 4 mostra os resultados com o stepsize:=0.001 e Digits:=20. O tempo de execução mais que dobrou, mas os resultados não melhoraram como seria o esperado. Isto pode indicar que estruturalmente cada método vai sempre responder da mesma forma para este problema. Certamente é inerente ao problema uma dificuldade que vai além das conhecidas. Conjecturamos que exista uma estrutura muito fina na formação do atrator caótico perto da origem quando ela é um equilíbrio sela-foco.

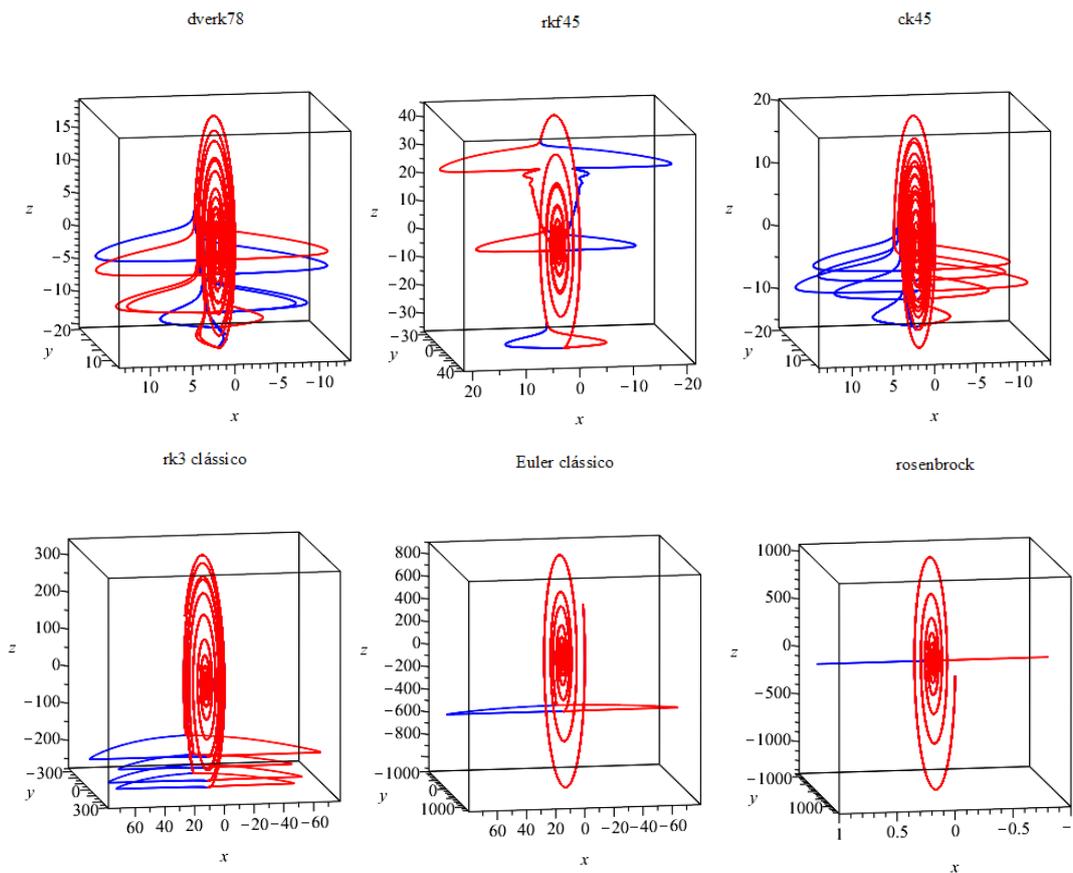


Figura 3: Resultado dos métodos, com stepsize=0.001.

A Figura 5 disponibiliza alguns testes extras que verificam a eficácia do método Cash-Karp para outros intervalos de tempo e também diferentes condições iniciais. Observa-se que o método respondeu muito bem sem crescimentos inadequados e sem cruzamento do plano invariante.

A análise dos resultados pode ser feita comparando e discutindo os 3 conjuntos de plotagens. Fica claro que a precisão interna pode influenciar, sem entretanto, transformar um método inadequado em adequado, indicando que mais testes são necessários para afirmações mais conclusivas. Uma análise quantitativa refinada está sendo elaborada para apresentação futura.

A diminuição do passo mostrou que o comportamento dos métodos não foi alterado. Isto também implica que os cálculos indicam consistentemente a incapacidade dos métodos resolverem corretamente o problema, sendo que a principal evidência se dá quando a solução cruza o plano invariante $x = 0$. A consequência é visível, mas a causa numérica ainda não é clara, pois os métodos com estabilidade especial também falharam.

O único método que se comportou acertadamente foi o Cash-Karp, ck45, pelo qual a solução não cruzou o plano e a diminuição do passo manteve a mesma resposta indicando convergência. Os testes extras também confirmaram sua boa performance.

O problema em questão, o sistema do memristor, possui uma especificidade teórica comprovada, plano $x = 0$ invariante, que permitiu descartar praticamente todos os métodos usuais, restando apenas o ck45. Não fica claro, entretanto, se o ck45 funciona pela sua construção, que responde

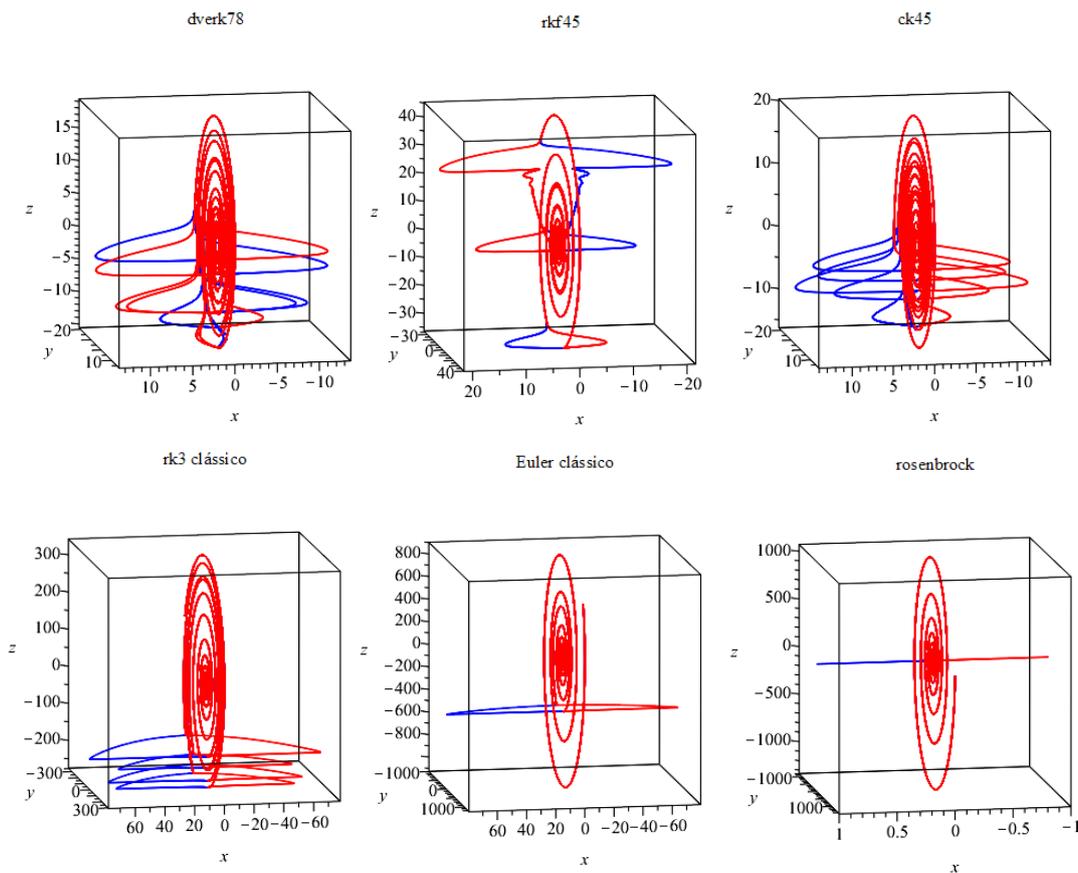


Figura 4: Resultado dos métodos, com stepsize=0.001 e Digits=20

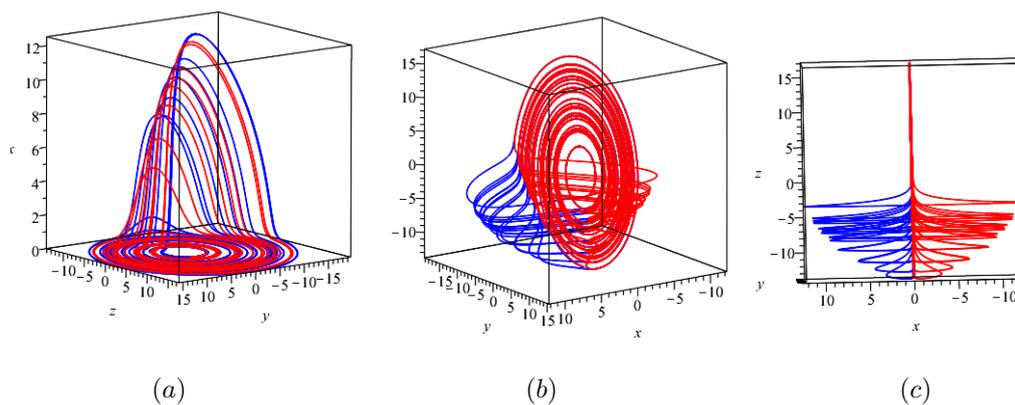


Figura 5: Soluções com o método Cash-Karp (a) condições iniciais (10, 5, 8) e (11, 2, 10) com tempo $t \in [15600, 15800]$, (b) condições iniciais (1, 1, 1) e (-1, 1, 1) com $t \in [1300 - 1700]$ e (c) é o (b) rotacinado.

à presença de frentes com rápida variação, ou se é por uma implementação sofisticada, seja em relação à própria detecção da frente ou seja pelo controle adequado da ordem.

Nossa breve análise mostra que o problema tem um tipo de exigência numérica não usual e que, talvez, necessite um aumento mais significativo da precisão dos cálculos internos, devido à presença de estruturas muito finas na formação do atrator caótico pelo equilíbrio sela-foco na origem. A utilização recente de redes neurais informadas pela física para solução de equações diferenciais [6] representa um possível caminho para futuras pesquisas.

4 Considerações Finais

As dificuldades numéricas apresentadas pelo sistema do memristor possibilitaram uma visão mais abrangente das exigências que os métodos numéricos devem obedecer. A discussão de um problema com propriedades analíticas claramente especificadas permitiu concluir que é preciso bastante cuidado na solução de sistemas dinâmicos não triviais, especialmente aquelas geradas por sistemas caóticos.

O rápido panorama sobre as dificuldades envolvidas na análise de sistemas dinâmicos indicam que é preciso levar em conta as propriedades teoricamente estabelecidas, e de métodos adequados. As propriedades teóricas propiciam o conhecimento intuitivo sobre as soluções local e globalmente, possível formação de órbitas instáveis ou estáveis, atratores e comportamento caótico. É preciso considerar métodos de integração mais aderentes às exigências do problema, seja via controle de ordem, estabilidade, tempo longo de integração, tamanho do passo e boa resposta às rápidas e bruscas variações nas soluções. A utilização de tamanho suficiente da precisão nos cálculos internos mostrou relevância.

Esse é um tema atual e recorrente, portanto, a apresentação deste sistema de difícil solução e características teóricas bem estabelecidas pode servir como um alerta importante para a abordagem computacional, estimulando um aumento de pesquisas neste contexto.

Referências

- [1] L. Brugnano, F. Mazzia e D. Trigiante. “Fifty years of stiffness”. Em: **Recent Advances in Computational and Applied Mathematics**. Ed. por T. Simos. Springer, 2011, pp. 1–21.
- [2] J. R. Cash e A. H. Karp. “A variable order Runge-Kutta method for value problems with rapid varying right-hand sides”. Em: **ACM Trans. Math. Softw.** 16 (1990), pp. 201–222.
- [3] E. Fehlber. “Low-order classical Runge-Kutta formula with stepsize control and their application to some heat transfer problems”. Em: **NASA Technical Report (TR) NASA-TR-R-315** (1969).
- [4] S. Lynch. **Dynamical Systems with Application using Maple**. Springer, 2010.
- [5] M. Messias e A. C. Reinol. “Local activity and simultaneous zero-Hopf bifurcations leading to multistability in a memristive circuit”. Em: **Inter. J. Bifurcat. Chaos** 31 (2021), 2130045 11 páginas.
- [6] P. Sharma, L. Evans, M. Tindall e P. Nithiarasu. “Stiff-PDEs and physics-informed neural networks”. Em: **Archives of Computational Methods in Engineering** 30 (2023), pp. 2919–2958.
- [7] X. Wang, N. Kuznetsov e G. Chen. **Chaotic Systems with multistability and Hidden Attractors**. Springer, 2021.