

\mathcal{D} -estabilização De Sistemas Lineares Incertos Com Minimização Do Controlador

Flávio A. Faria,¹ Ruam C. N. Pazini²

DMAT/FEIS/UNESP, Ilha Solteira, SP.

Dante J. S. Oncoy,³ Hugo F. Yamanaka,⁴ Rodrigo Cardim,⁵ Marcelo C. M. Teixeira⁶

DEE/FEIS/UNESP, Ilha Solteira, SP.

Resumo. Neste trabalho é proposto um método de realimentação de estado para a \mathcal{D} -estabilização de sistemas lineares sujeitos a incertezas politópicas. O projeto de controle visa garantir a \mathcal{D} -estabilização do sistema controlado ao mesmo tempo que minimiza a ação de controle. Os polos do sistema controlado são alocados em uma região circular que assegura uma taxa de decaimento pré-definida para a resposta dinâmica do sistema. A eficiência do método proposto é ilustrada através de um exemplo numérico.

Palavras-chave. Incertezas Politópicas, \mathcal{D} -estabilidade, Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), Alocação Regional de Polos, Análise Aplicada.

1 Introdução

Um tema de grande interesse em teoria de controle é a inclusão de restrições de desempenho no projeto do controlador. Para sistemas lineares já existem ferramentas eficientes para garantir o desempenho do sistema através da alocação de polos [12]. Resultados clássicos como a fórmula de Ackerman fornecem uma maneira simples e eficiente para alocação dos polos do sistema controlado [12]. O problema surge quando é necessário projetar um controlador para sistemas lineares sujeitos a incertezas politópicas. Neste caso, resultados tradicionais não são aplicáveis, sendo necessário usar teoria de controle robusto para garantir o desempenho do sistema controlado. Em controle robusto não é possível estabelecer a alocação dos polos em um ponto específico. Em geral, define-se uma região de interesse no semi-plano esquerdo complexo e propõe-se um resultado garantindo que os polos do sistema controlado permaneçam confinados na região desejada. Tal resultado é referenciado na literatura como alocação regional de polos [7]. A alocação regional de polos é desenvolvida considerando o conceito de \mathcal{D} -estabilidade de matrizes [6]. Em [2], os autores provam que determinadas regiões convexas do plano complexo podem ser representadas por desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* (LMIs)). Tais regiões passaram a ser conhecidas na literatura como regiões LMIs [2, 3, 13]. Regiões LMIs permitem incluir restrições de performance de maneira simples no controlador e são facilmente estendidas para o controle de sistemas lineares incertos [3, 4, 13] ou sistemas não lineares [8, 11, 14]. Este trabalho se concentra nas condições de \mathcal{D} -estabilização em regiões circulares [5–7, 9]. Esse tipo de região possui uma representação algébrica simples e a desigualdade matricial envolve apenas o produto entre matrizes. Por outro lado, regiões mais complexas, como as apresentadas em [2, 13], envolvem

¹flavio.faria@unesp.br

²ruam.carlos@unesp.br

³dante.solis-oncoy@unesp.br

⁴hugo.yamanaka@unesp.br

⁵rodrigo.cardim@unesp.br

⁶marcelo.minhoto@unesp.br

o produto de Kronecker. Parte dos resultados propostos no texto foram desenvolvidos em um estágio de iniciação científica. Logo, a escolha de uma região circular torna o desenvolvimento teórico da pesquisa acessível para alunos de graduação. Em [9], os autores constroem uma região circular para impor um limite na taxa de decaimento do sistema controlado, ao mesmo tempo que limita a parte inferior da região de alocação dos polos. Limitar a região de alocação pode facilitar a implementação prática do controlador. Em geral, quanto maior é o módulo do polo, maior é a norma do ganho necessário para a alocação. Na prática, o controlador está sujeito a saturação e, dependendo dos valores usados no ganho, não é possível implementá-lo. Apesar da região circular limitar a alocação dos polos, as desigualdades matriciais apresentadas em [6, 7, 9] são conservadoras, isto é, para encontrar uma solução numérica pode ser necessário usar um valor grande para o raio da região circular. O que, na prática, pode resultar em valores inadequados para o ganho do controlador. Este trabalho propõe um método de otimização para minimizar o ganho do controlador que aloca os polos na região de interesse. O método é simples e pode ser adaptado para regiões LMIs mais complexas [2, 13]. A eficiência do método proposto é ilustrada na solução de um exemplo numérico.

1.1 Notações

Ao longo do texto, o símbolo \mathbb{K}_s é usado para descrever o conjunto de números naturais $\{1, 2, \dots, s\}$. O símbolo \star denota o elemento transposto em uma matriz simétrica. A transposta de uma matriz é denotada por \mathbf{M}' e $He(\mathbf{M}) = \mathbf{M} + \mathbf{M}'$. A desigualdade matricial $\mathbf{M} \prec 0$ ($\mathbf{M} \succ 0$) significa que \mathbf{M} é simétrica definida negativa (positiva) e \mathbf{I}_s representa uma matriz identidade de dimensão s .

2 Formulação do problema

Considere a família de sistemas lineares incertos descrita por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) \quad (1)$$

sendo $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ matrizes constantes conhecidas, N o número de vértices matriciais e α_i constantes desconhecidas satisfazendo

$$\forall i \in \mathbb{K}_N, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1. \quad (2)$$

O projeto de controle consiste em encontrar uma matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tal que, ao realimentar o sistema (1) com a entrada

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (3)$$

todos os polos do sistema controlado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}) \mathbf{x}(t) \quad (4)$$

estejam confinados na região circular da Figura 1.

A região circular da Figura 1 foi construída para garantir que o sistema (4) tenha taxa de decaimento maior ou igual a t_d . Logo, a região tem raio r e centro $(-q, 0)$, sendo $q = t_d + r$. Para garantir a alocação regional de polos do sistema (4) na região $S(t_d, r)$, em [9] é apresentado o seguinte resultado.

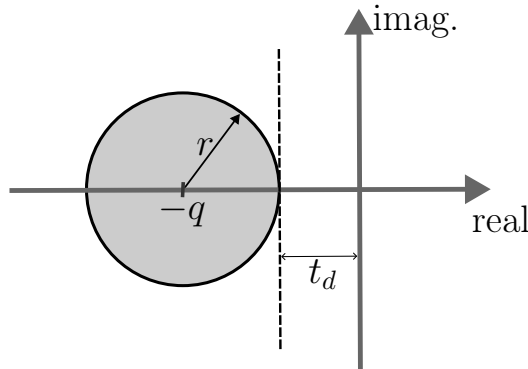


Figura 1: Região Circular $S(t_d, r)$. Fonte: Adaptado de [9].

Lema 2.1 ([9]). *Dados números reais positivos t_d e r . Se existir uma matriz simétrica $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e uma matriz $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ satisfazendo as desigualdades (5) e (6), então o ganho $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$ garante a \mathcal{D} -estabilização do sistema (4) na região $S(t_d, r)$.*

$$\mathbf{W} \succ \mathbf{0} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} He(\mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{B}_i \mathbf{Z}) + 2t_d \mathbf{W} & \star \\ \mathbf{W} \mathbf{A}_i' + \mathbf{Z}' \mathbf{B}_i' + t_d \mathbf{W} & -r \mathbf{W} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \tag{6}$$

Do ponto de vista de controle, a região $S(t_d, r)$ é mais eficiente que a região imposta pela condição de taxa de decaimento padrão [1], pois ela também assegura um limitante inferior para os polos do sistema controlado. Em geral, quanto maior é o módulo do polo, maior é o esforço de controle (norma do ganho) necessário para garantir a alocação. Neste ponto, pode-se ressaltar um problema com o Lema 2.1. Apesar de garantir um limite inferior para a alocação dos polos, a LMI (6) é uma condição conservadora para a região circular e, em alguns casos, é necessário usar um valor grande para o raio r para obter factibilidade nas LMI. Na próxima seção será proposto um método de otimização para contornar este problema. O método consiste em minimizar o ganho que assegura a \mathcal{D} -estabilização do sistema (4) na região $S(t_d, r)$.

3 Resultado principal

Para obter o resultado principal será necessário usar o complemento de Schur.

Lema 3.1 ([1]). *Seja \mathbf{S} uma matriz simétrica definida positiva, $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$ e \mathbf{R} matrizes de dimensões apropriadas. Então, as seguintes desigualdades são equivalentes:*

$$\mathbf{M} - \mathbf{R}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R} \succ \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{R}' \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}.$$

Teorema 3.1. *Dados números reais positivos t_d , r e β_2 . Se existir um número real positivo β_1 , uma matriz simétrica $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e uma matriz $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ satisfazendo o problema de otimização (7)-(10), então $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$ é o ganho com menor norma euclidiana que garante a \mathcal{D} -estabilização do sistema (4) na região $S(t_d, r)$.*

$$\min \beta_1 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & \text{sujeito à} \\ & \mathbf{W} \succ \beta_2 \mathbf{I}_{n_x} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} He(\mathbf{A}_i\mathbf{W} + \mathbf{B}_i\mathbf{Z}) + 2t_d\mathbf{W} & \star \\ \mathbf{W}\mathbf{A}'_i + \mathbf{Z}'\mathbf{B}'_i + t_d\mathbf{W} & -r\mathbf{W} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1\mathbf{I}_{n_u} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}. \quad (10)$$

Demonstração. A LMI (8) garante que $\mathbf{W} \succ \mathbf{0}$, logo as desigualdades (8) e (9) são equivalentes às condições (5), e (6) e pelo Lema 2.1, o ganho $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$ garante a \mathcal{D} -estabilização do sistema (4) na região $S(t_d, r)$. O próximo passo é garantir que \mathbf{K} é o ganho mínimo que assegura a \mathcal{D} -estabilização.

Aplicando o Lema 3.1 na LMI (10), obtêm-se

$$\beta_1\mathbf{I}_{n_u} - \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}' \succ \mathbf{0}. \quad (11)$$

Segue de (11) que

$$\mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Z}' \prec \beta_1\mathbf{I}_{n_u}. \quad (12)$$

Considerando que $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$ de (12), tem-se

$$\mathbf{K}\mathbf{K}' \prec \beta_1\mathbf{I}_{n_u}. \quad (13)$$

Finalmente, pela LMI (8), conclui-se que

$$\beta_2\mathbf{K}\mathbf{K}' \prec \mathbf{K}\mathbf{K}' \prec \beta_1\mathbf{I}_{n_u} \Rightarrow \mathbf{K}\mathbf{K}' \prec \frac{\beta_1}{\beta_2}. \quad (14)$$

Como β_2 é um valor fixo e $\mathbf{K}\mathbf{K}' = \|\mathbf{K}\|^2$, então a função objetivo (7) garante que \mathbf{K} é o ganho com menor norma euclidiana que assegura a \mathcal{D} -estabilização do sistema (4) na região $S(t_d, r)$. Ou seja, é o ganho mínimo para \mathcal{D} -estabilização do sistema. \square

Na próxima seção será ilustrado a eficiência do Teorema 3.1 na solução de um exemplo numérico.

4 Exemplo

Considere um sistema linear (4) com as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -180 & 0 & 0 & 0 \\ -21.23 & 0 & -0.6888 & -14.7 & 0 \\ 256.7 & 0 & 122.6 & -1.793 & 0 \\ -52.33 & 304.7 & 0 & 36.7 & -9.661 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 180 & 0 \\ 0 & 180 \\ 0 & 0 \\ 256.7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} -177.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -177.3 & 0 & 0 & 0 \\ -19.11 & 0 & -0.6199 & -13.204 & 0 \\ 260.56 & 0 & 134.86 & -1.793 & 0 \\ -47.09 & 335.18 & 0 & 40.38 & -8.695 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 175.95 & 0 \\ 0 & 175.95 \\ 0 & 0 \\ 250.91 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Considerando uma taxa de decaimento $t_d = 5$ e $\beta_2 = 10^{-8}$, a seguir é exibido o ganho do controlador obtido com o Lema 2.1 e Teorema 3.1, para os casos $r = 50$ e $r = 100$. As LMIs foram numericamente resolvidas no MATLAB usando os pacotes “YALMIP” [10] e “SDPT3” [15]. A tabela 1 ilustra os ganhos encontrados pelo Lema 2.1 e o Teorema 3.1 e a porcentagem de redução na norma do ganho para o Teorema 3.1.

Pela Tabela 1, observa-se que para $r = 50$, o Teorema 3.1 obteve um ganho com redução na norma de aproximadamente 37%, como as LMIs (5) e (6) são representações conservadoras da região

Tabela 1: Ganhos encontrados com o Lema 2.1 e Teorema 3.1.

Resultados	Ganho do controlador	Redução (%)
Lema 2.1: $t_d = 5 r = 50$ $\mathbf{K} =$	$\begin{bmatrix} 0.4468 & 0.0001 & -0.1121 & -0.0189 & 0.0006 \\ -0.2876 & 0.6770 & -0.0834 & -0.0407 & -0.0076 \end{bmatrix}$	–
Teorema 3.1: $t_d = 5 r = 50$ $\mathbf{K} =$	$\begin{bmatrix} 0.3161 & -0.0040 & -0.0725 & -0.0375 & -0.0000 \\ 0.0007 & 0.4821 & 0.0027 & 0.0018 & 0.0000 \end{bmatrix}$	37%
Lema 2.1: $t_d = 5 r = 100$ $\mathbf{K} =$	$\begin{bmatrix} -0.0844 & 0.0064 & -0.1776 & -0.0808 & 0.0003 \\ -0.1746 & 0.3543 & -0.0686 & -0.0784 & -0.0477 \end{bmatrix}$	–
Teorema 3.1: $t_d = 5 r = 100$ $\mathbf{K} =$	$\begin{bmatrix} -0.0918 & 0.0000 & -0.0334 & -0.0629 & -0.0000 \\ 0.0046 & -0.0000 & -0.0214 & 0.0038 & -0.0000 \end{bmatrix}$	72.5%

$S(t_d, r)$, então foi realizada uma segunda simulação a fim de verificar a eficácia do Teorema 3.1 conforme aumenta-se o valor de r . Para o caso $r = 100$, o Teorema 3.1 foi capaz de encontrar um ganho com redução de norma de aproximadamente 72.5% em relação ao Lema 2.1. Além disso, o ganho encontrado pelo Teorema 3.1 para $r = 100$ teve uma redução de 85% em relação ao ganho encontrado pelo Lema 2.1 com $r = 50$. Ou seja, nos dois casos o Teorema 3.1 foi capaz de garantir a \mathcal{D} -estabilização do sistema (4), com ganhos consideravelmente menores. Neste exemplo, o menor valor do raio para o qual o Lema 2.1 e Teorema 3.1 são factíveis é $r = 19$. Neste caso, o conservadorismo das LMIs impediu que o Teorema 3.1 produzisse um resultado satisfatório. O ganho obtido pelo Teorema 3.1 apresentou uma redução de apenas 12%. Para ilustrar a eficiência dos métodos na \mathcal{D} -estabilização do sistema, a Figura 2 mostra a localização dos polos do sistema (4), considerando os casos $r = 50$ e $r = 100$.

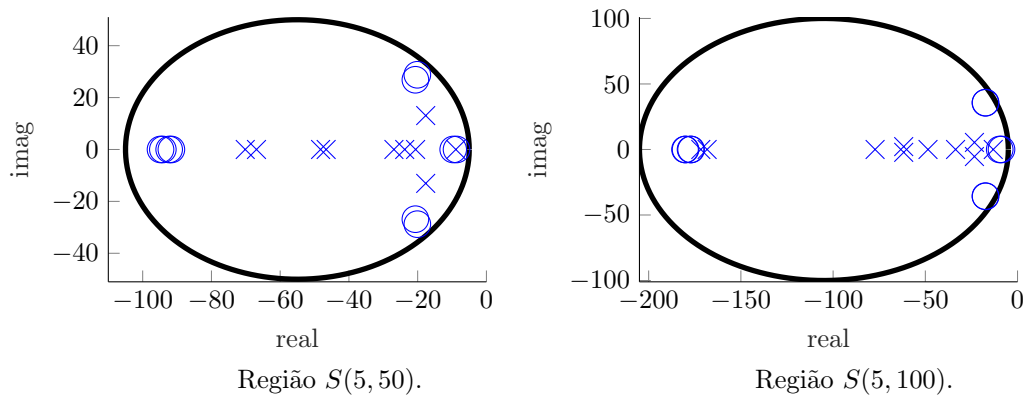


Figura 2: polos alocados com o ganho do Lema 2.1 (x) e Teorema 3.1 (o). Fonte: Autor.

Pela Figura 2, todos os polos do sistema estão confinados na região de interesse. As Figuras 3 e 4 exibem o comportamento dinâmico dos estados do sistema controlado com os ganhos encontrados pelo Lema 2.1 e Teorema 3.1. Em ambos os casos é possível verificar que a restrição de taxa de decaimento $t_d = 5$ estabilizou o sistema controlado no tempo 0,5 (tempo de estabelecimento). Neste exemplo numérico não foi considerado nenhuma unidade de tempo para simulação. O valor 0,5 pode ser suficiente para alguns problemas práticos, porém é importante ressaltar que pode-se ajustar o tempo de estabelecimento apenas alterando o valor de t_d .

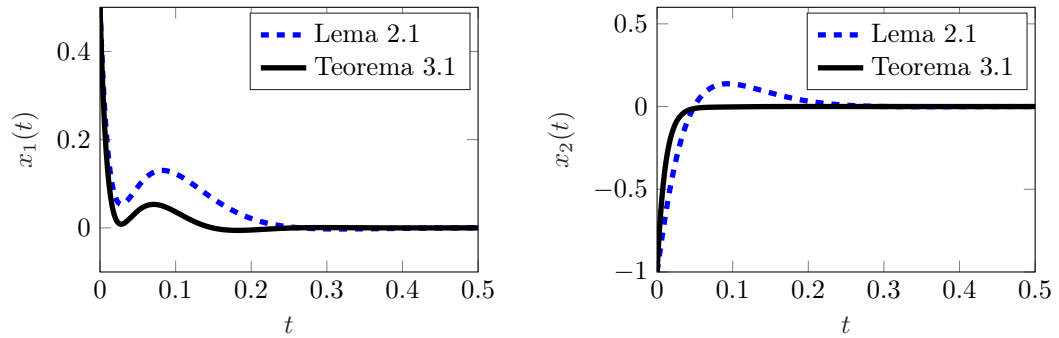


Figura 3: Comportamento dinâmico dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$, para $r = 50$. Fonte: Autor.

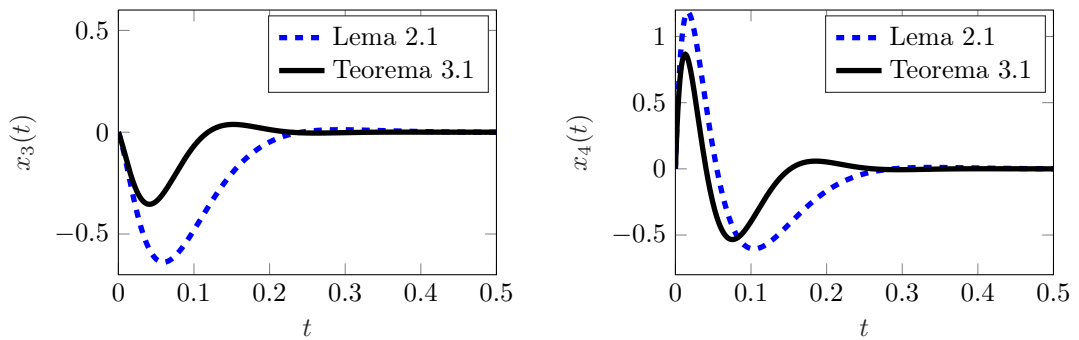


Figura 4: Comportamento dinâmico dos estados $x_3(t)$ e $x_4(t)$, para $r = 50$. Fonte: Autor.

5 Conclusões

Neste trabalho, foi proposto um método que assegura a \mathcal{D} -estabilização de sistemas lineares incertos em uma região circular específica. O método minimiza a norma do ganho do controlador, resultando em um controle ótimo para o problema de \mathcal{D} -estabilização. Trabalhos futuros incluirão a aplicação do método proposto ao problema de controle com saturação nos atuadores.

Agradecimentos

Este trabalho recebeu suporte financeiro da FAPESP (Processos: 2023/01279-0, 2023/05700-2) e CNPq (Processo: 308581/2022-9, 131242/2023-7).

Referências

- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron e V. Balakrishnan. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. 2nd. Volume 15 of Studies in Applied Mathematics. <http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/>. USA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994, p. 203. ISBN: 0-89871-334-X.
- [2] M. Chilali e P. Gahinet. “ \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach”. Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 41.3 (1996), pp. 358–367. DOI: 10.1109/9.486637.

- [3] M. Chilali, P. Gahinet e P. Apkarian. “Robust pole placement in LMI regions”. Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 44.12 (1999), pp. 2257–2270. DOI: 10.1109/9.811208.
- [4] F. A. Faria, E. Assunção, M. C. M. Teixeira, R. Cardim e N. A. P. da Silva. “Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems”. Em: **International Journal of Control** 82.1 (2009), pp. 1–12. DOI: 10.1080/00207170801942188.
- [5] F. A. Faria, Geraldo N. Silva, Vilma A. Oliveira, R. Cardim, M. R. Moreira e E. R. P. da Silva. “ \mathcal{D} -estabilização de sistemas fuzzy TS usando funções de Lyapunov Fuzzy”. Em: **Proceedings of the X Brazilian Conference On Dynamics, Control And Their Applications**. Águas de Lindóia: SBMAC, 2011, pp. 1–4.
- [6] K. Furuta e S. B. Kim. “Pole assignment in a specified disk”. Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 32.5 (1987), pp. 423–427. DOI: 10.1109/TAC.1987.1104624.
- [7] W. M. Haddad e D. S. Bernstein. “Controller Design with Regional Pole Constraints”. Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 37.1 (1992), pp. 54–69. DOI: 10.1109/9.109638.
- [8] S. K. Hong e Y. Nam. “Stable fuzzy control system design with pole placement constraint: an LMI approach”. Em: **Computers in Industry** 51 (2003), pp. 1–11. DOI: 10.1016/S0166-3615(03)00057-5.
- [9] V.J.S. Leite, V.F. Montagner e P.L.D. Peres. “Robust pole location by parameter dependent state feedback control”. Em: **Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control**. Vol. 2. 2002, pp. 1864–1869. DOI: 10.1109/CDC.2002.1184796.
- [10] J. Lofberg. “YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB”. Em: **2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation**. 2004, pp. 284–289. DOI: 10.1109/CACSD.2004.1393890.
- [11] S. Kiong Nguang e P. Shi. “Robust \mathcal{H}_∞ output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic \mathcal{D} -stability constraints: An LMI approach”. Em: **Automatica** 176 (2006), pp. 2161–2191. DOI: 10.1016/j.ins.2005.02.005.
- [12] K. Ogata. **Engenharia de controle moderno**. 5^a ed. New York: Pearson Universidades, 2010, p. 824. ISBN: 8576058103.
- [13] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier e J. Bernussou. “A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty”. Em: **Systems & Control Letters** 40.1 (2000), pp. 21–30. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00119-X.
- [14] Eduardo S. Tognetti e Vilma A. Oliveira. “Fuzzy pole placement based on piecewise Lyapunov functions”. Em: **International Journal of Robust and Nonlinear Control** 20.5 (2010), pp. 571–578. DOI: 10.1002/rnc.1454.
- [15] K. C. Toh, M. J. Todd e R. H. Tütüncü. “SDPT3 – A MATLAB software package for semidefinite programming, Version 1.3”. Em: **Optimization Methods and Software** 11.1-4 (1999), pp. 545–581. DOI: 10.1080/10556789908805762.