Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Jogo da Coloração Total em Ciclos

Leonardo B. de Souza[1], Diego S. Nicodemos[2]
Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, RJ
Diana Sasaki[3]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Uma Coloração Total de um grafo é uma coloração em que elementos adjacentes possuem cores distintas, isto é, vértices adjacentes, arestas adjacentes e arestas que incidem em vértices pertencem a partições distintas. O menor número de cores para o qual um grafo G admite uma Coloração Total é chamado de número cromático total e é representado por $\chi_T(G)$. O jogo da coloração, concebido na década de 80, surgiu como uma tentativa alternativa de provar o Teorema das Quatro Cores. Neste jogo, é dado um número finito t de cores, e os dois jogadores, chamados na literatura de Alice e Bob, se alternam colorindo os vértices ainda não coloridos de um grafo. Enquanto o objetivo de Alice é colorir o grafo utilizando no máximo t cores, o objetivo de Bob é o de impedi-la. Alice ganha a partida quando o grafo é completamente colorido com no máximo t cores, caso contrário, Bob ganha. Propomos um estudo do jogo da Coloração Total sobre ciclos, partindo do conhecimento prévio do número cromático total para esta classe de grafos.

Palavras-chave. Coloração Total, Grafos, Ciclos, Ensino Básico

1 Introdução

Este trabalho é uma proposta de trazer para o Ensino Básico jogos combinatórios a fim de promover um ensino de matemática mais baseado na ação e na cooperação dos alunos do que os modelos tradicionalmente utilizados em que o professor acena como agente central do processo de ensino-aprendizagem. Neste sentido, nos referimos a Pólya [4] que defende uma metodologia de resolução de problemas associada à Teoria de Grafos. Segundo Pólya, os problemas levados para a sala de aula devem ser de caráter prático, o que é natural aos problemas propulsores da Teoria de Grafos.

O tema desta pesquisa é o jogo da Coloração Total sobre ciclos. Tradicionalmente, no jogo da coloração de vértices, é dado um número finito t de cores a dois jogadores, chamados de Alice e Bob. Estes jogadores se alternam colorindo os vértices ainda não coloridos de um grafo. Enquanto o objetivo de Alice é colorir o grafo utilizando no máximo t cores, o objetivo de Bob é o de impedi-la. Alice ganha a partida quando o grafo é completamente colorido com no máximo t cores, caso contrário, Bob ganha. O jogo da Coloração Total é uma variação do jogo da coloração de vértices. No jogo da Coloração Total também é dado um número finito de cores a Alice e a Bob a fim de colorirem, alternadamente, tanto os vértices quanto as arestas de um grafo. Alice ganha quando consegue colorir o grafo de entrada com as cores dadas, caso contrário Bob vence.

No que concerne ao estudo de noções de natureza combinatória e a exploração de habilidades, sugerido pelos autores da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) para serem desenvolvidos a partir do ensino fundamental, os objetos de conhecimento são os problemas de

[1]leonardo.souza.2@cp2.edu.br
[2]diegonicodemos@cp2.g12.br
[3]diana.sasaki@ime.uerj.br

contagem. Com a proposição do jogo da Coloração Total objetiva-se promover compreensão acerca da mobilização e o exercício do raciocínio combinatório, não com o propósito inicial de quantificar possibilidades, mas com o objetivo de mostrar todos os resultados e estratégias possíveis quando da disputa de uma partida no jogo.

Organizamos este trabalho de modo que na Seção 2 discutimos conceitos básicos necessários para a compreensão plena do jogo e da classe de grafos analisada. Apresentamos, além da terminologia utilizada pela teoria de grafos, resultados sobre o problema da Coloração Total. Na Seção 3, discutimos o jogo da Coloração Total sobre os ciclos C_3 e C_4 e os desdobramentos desta abordagem no Ensino Básico. Por fim, na Seção 4, descrevemos os resultados apresentados no texto e os potenciais trabalhos oriundos desta pesquisa.

2 Conceitos Básicos

Discutimos, nesta seção, conceitos preliminares sobre a teoria de grafos e sobre a Coloração Total de grafos. As definições e resultados apresentados referentes à teoria de grafos podem ser obtidas em [2]. Para maiores detalhes sobre o jogo da Coloração Total o leitor é convidado a consultar [3].

2.1 Sobre Grafos

Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ consiste de um conjunto não vazio $V(G)$ de **vértices** e de um conjunto $E(G)$ de **arestas**, de modo que cada **aresta** $e \in E(G)$ é um par não ordenado de vértices distintos, isto é, para toda aresta $e \in E(G)$ existem $u \in V(G)$ e $v \in V(G)$ distintos e tais que $e = \{u, v\}$ ou simplesmente $e = uv$. Neste caso, dizemos que os vértices u e v são **adjacentes** ou **vizinhos** e que a aresta e é **incidente** aos vértices u e v ou que u e v são as **extremidades** da aresta e. De maneira análoga, duas arestas que possuem a mesma extremidade são chamadas de **arestas adjacentes**. Quando não houver risco de ambiguidade escreveremos $G = (V, E)$ ou simplesmente G. Neste trabalho, todos os grafos considerados são **simples**, isto é, não possuem arestas **múltiplas ou paralelas** (arestas distintas que unem o mesmo par de vértices) ou **laços** (aresta que une um vértice a ele mesmo).

O **grau** de um vértice v em G, representado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes à v. Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os graus mínimo e máximo, respectivamente, dos vértices do grafo G. Um grafo é ***k*-regular** se todos os seus vértices têm grau k. Um grafo 3-regular é chamado de grafo **cúbico**. Se todos os vértices de um grafo têm graus menores que 3, então ele é chamado de grafo **subcúbico**. Um grafo em que cada par de vértices distintos está unido por uma aresta é chamado de grafo **completo**. Todo grafo completo com n vértices é $(n-1)$-regular.

Dado $k \geq 0$, um **passeio** $P = v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4 \ldots v_{k-1}e_{k-1}v_ke_kv_{k+1}$ é uma sequência finita de vértices e arestas de um grafo, tal que $v_i \in V$, $e_i \in E$, e $e_i = v_iv_{i+1}$. Neste caso, o *comprimento* de P é igual a k, seu número de arestas com ou sem repetição. Vamos denotar o passeio somente pela sequência $(v_1, v_2, \ldots, v_{k+1})$ subjacente de seus vértices. Se um passeio não possui arestas repetidas, então o chamamos de **trilha**. Se o passeio não repete vértices, então o chamamos de **caminho**. Dados dois vértices u e v de um grafo $G = (V, E)$, um **caminho** entre u e v, ou caminho que *conecta* u à v, em G é uma sequência $P = l_0l_1...l_k$, em que $u = l_0$, $v = l_k$, os vértices l_i são distintos e $l_il_{i+1} \in E$.

Um passeio $P = l_0l_1...l_k$ é **fechado** se $k > 0$ e $l_0 = l_k$. Um **ciclo ou circuito** é uma trilha fechada com uma única repetição de vértices de comprimento no mínimo igual a 3. Um ciclo em k arestas é também chamado de ***k*-ciclo**. A paridade do inteiro k define se o ciclo é **par** ou se o ciclo é **ímpar**.

Dado $k \in N$, uma k-coloração de vértices de um grafo G é uma atribuição de cores aos vértices de G, de modo que vértices adjacentes têm cores distintas. Definimos o número cromático de G, representado por $\chi(G)$, como sendo o menor inteiro k de modo que G possua uma k-coloração de vértices. Uma k-Coloração Total de G é uma atribuição de cores aos vértices e às arestas de G, de modo que vértices adjacentes têm cores distintas, arestas adjacentes têm cores distintas e arestas incidentes a vértices têm cores distintas. O número cromático total de G, denotado por $\chi_T(G)$, é o menor k tal que G possui uma Coloração Total. Para todo grafo G, temos que $\chi_T(G) \geq \Delta + 1$. A conjectura da Coloração Total estima que $\chi_T(G) \leq \Delta + 2$. Quando um grafo G é tal que $\chi_T(G) = \Delta + 1$, dizemos que G é tipo 1, caso contrário dizemos que G é tipo 2.

2.2 Coloração Total

Apresentamos, nesta seção, alguns resultados sobre Coloração Total de ciclos. O Teorema 2.1, concebido por Behazad [1] em 1965, estabelece que o número cromático total de um ciclo depende da quantidade de vértices contida neste ciclo.

Theorem 2.1. *O número cromático total χ_T de um ciclo C_n, contendo n vértices, é dado por:*

- $\chi_T(C_n) = 3$, *quando* $2n \cong 0 \ mod3$;
- $\chi_T(C_n) = 4$, *caso contrário.*

Na Figura 2, exibimos colorações totais para os ciclos C_3, C_4, C_5 e C_7 à luz do Teorema 2.1.

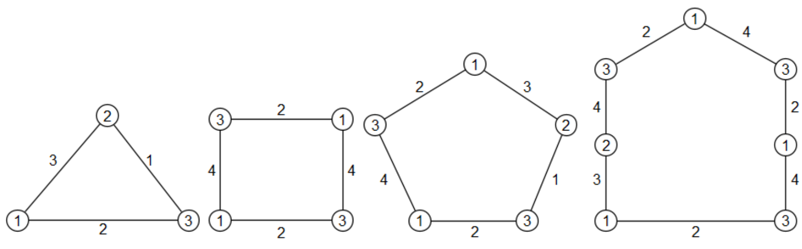

Figura 1: Em a) a 3-Coloração Total do C_3, em b) uma 4-Coloração Total do C_4, em c) uma 4-Coloração Total do C_5 e, em d), uma 4-Coloração Total do C_7. Fonte: dos autores.

De acordo com as colorações apresentadas na Figura 2 e no Teorema 2.1 estabelecemos colorações para os demais ciclos, conforme o Teorema 2.2.

Theorem 2.2. *Seja C_n um ciclo contendo n vértices.*

- *Se* $2n \cong 0 \ mod3$, *então* $\chi_T(C_n) = 3$ *e a Coloração Total de* C_n *segue a coloração de* C_3;
- *Se* $2n \cong 0 \ mod4$, *então* $\chi_T(C_n) = 4$ *e a Coloração Total de* C_n *segue a coloração de* C_4;
- *Se* $2n \cong 1 \ mod3$ *e* $2n \cong 2 \ mod4$ *então* $\chi_T(C_n) = 4$ *e a Coloração Total de* C_n *segue a coloração de* C_5;
- *Se* $2n \cong 2 \ mod3$ *e* $2n \cong 2 \ mod4$ *então* $\chi_T(C_n) = 4$ *e a Coloração Total de* C_n *segue a coloração de* C_7.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0450

A prova deste teorema é demasiadamente trivial, bastando observar os restos entre o total de elementos contidos no ciclo C_n e 3 ou 4 (a depender se $2n$ é ou não divisível por 3 ou por 4). A Figura 2 ilustra colorações totais para os ciclos C_9, C_{10}, C_{11} e $C_{!3}$ à luz do Teorema 2.2.

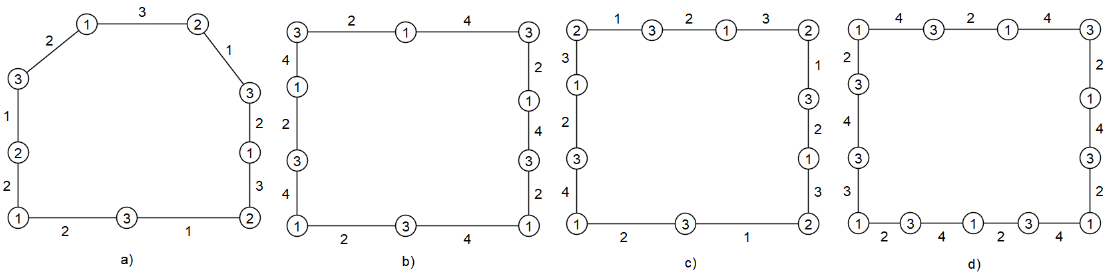

Figura 2: Em a) uma 3-Coloração Total para o C_9 guiada pelo C_3, em b) uma 4-Coloração Total para o C_{10} guiada pelo C_4, em c) uma 4-Coloração Total para o C_{11} guiada pelo C_5 e, em d), uma 4-Coloração Total para o C_{13} guiada pelo C_7. Fonte: dos autores.

3 O Jogo da Coloração Total e o Ensino de Matemática

Segundo Furtado [3], dadas t cores, Alice e Bob se alternam colorindo propriamente os vértices não coloridos de um grafo. O objetivo de Alice é colorir o grafo de entrada com as t cores, e Bob deseja impedi-la, tentando aumentar o número de cores. Alice ganha quando o grafo é completamente colorido com as t cores; caso contrário, Bob ganha.

Propomos abordar o jogo da Coloração Total sob os ciclos C_3 e C_4, porém como sabemos precisamente o número cromático total destes grafos vamos considerar que as t cores fornecidas para Alice e para Bob sejam iguais a 3 para o C_3 e 4 para o C_4. De um modo geral, a nossa leitura do jogo da Coloração Total sobre ciclos C_n considera que são dadas $\chi_T(C_n)$ cores, enquanto o objetivo de Alice é colorir o C_n utilizando no máximo $\chi_T(C_n)$ cores, o objtivo de Bob é o de impedí-la. Convém ressaltar, como observado por Furtado, que Alice e Bob podem usar qualquer uma das $\chi_T(C_n)$ cores no momento que desejarem. A fim de tornar a análise do jogo o mais didática possível vamos nos referir aos elementos dos ciclos C_3 e C_4 como indicado nas Figuras 3 e 4.

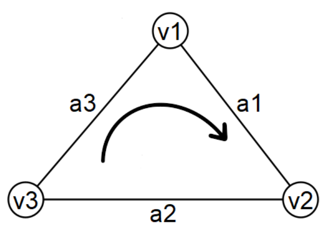

Figura 3: O primeiro, o segundo e o terceiro vértices de C_3 serão sempre considerados pelos vértices rotulados de v1, v2 e v3, respectivamente. Para as arestas utilizaremos uma nomenclatura análoga, sempre aumentando o rótulo no sentido horário. Fonte: dos autores.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0450

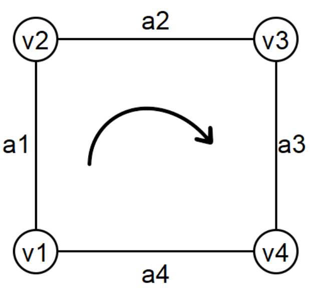

Figura 4: O primeiro, o segundo, o terceiro e o quarto vértices de C_4 serão sempre considerados pelos vértices rotulados de v1, v2, v3 e v4, respectivamente. Para as arestas utilizaremos uma nomenclatura análoga, sempre aumentando o rótulo no sentido horário. Fonte: dos autores.

4 O Jogo da Coloração Total sobre C_3

Vamos começar a análise inicialmente admitindo que Alice começa jogando. Neste caso, sem perda de generalidade, Alice pode jogar em qualquer um dos seis elementos presentes em C_3. Vamos supor que Alice comece rotulando o vértice v1, como na Figura 5a). Em seguida, Bob pode observar como o ciclo C_3 foi totalmente colorido por 3 cores (veja a Figura 2a)) e tentar não seguir esta coloração. Neste caso, Bob escolhe rotular a aresta 2 de 2 (Figura 5b)). A partir daí, não é possível colorir o C_3 com $\chi_T(C_3) = 3$ cores e Bob é o vencedor.

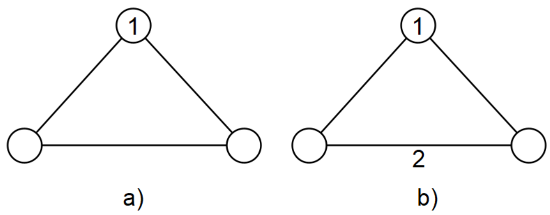

Figura 5: Duas rodadas do jogo da Coloração Total iniciado por Alice. Fonte: dos autores.

Agora vamos considerar Bob como o primeiro jogador. Novamente, Bob começa colorindo o vértice v1 com a cor 1, sem perda de generalidade (Figura 6a)). Agora Alice procede à luz da Coloração Total para o C_3 e colore, neste caso a aresta oposta ao vértice v1, rotulando-a de 1 (Figura 6b)). Esta estratégia de Alice já assegura que a Coloração Total do jogo será igual a 3, pois onde Bob colorir ela mantém o mesmo rótulo para o elemente oposto e vence o jogo.

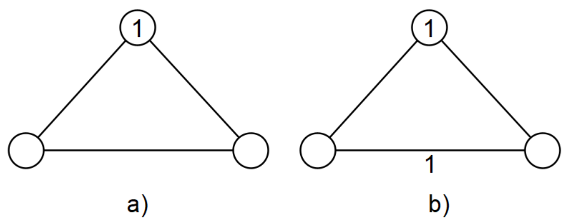

Figura 6: Duas rodadas do jogo da Coloração Total iniciado por Bob. Fonte: dos autores.

5 O Jogo da Coloração Total sobre C_4

A análise para o jogo da Coloração Total sobre o ciclo C_4 se dá a partir do fato de que $\chi_T(C_3) = 4$. Neste caso, Alice deve conseguir colorir totalmente o C_4 com exatas 4 cores, enquanto Bob deve forçar que a Coloração Total necessite de pelo menos 5 cores. Convidamos o leitor a observar a Figura 7. Para que Bob seja o vencedor do jogo da Coloração Total sobre o C_4 é imprescindível que haja uma situação como a descrita na Figura 7. Para esta situação ocorrer seriam necessárias 4 rodadas e, neste caso, Alice sempre conseguirá evitar este cenário. Portanto, independente de Alice ou Bob começarem o jogo, Alice sempre vencerá.

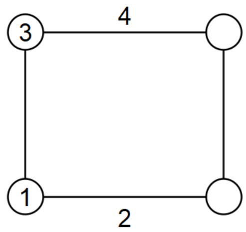

Figura 7: Situação necessária para que Bob vença o jogo no C_4. Fonte: dos autores.

6 Sobre o Jogo da Coloração Total e o Ensino de Matemática

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular -BNCC, matemática é número, jogo e linguagem. Pelo seu viés, não é só um manancial de números, operações e formas geométricas é, também, uma forma de ver e modelar realidades, uma estrutura de pensamento e um campo de desenvolvimento de múltiplas habilidades. Os jogos de estratégia, os desafios lógicos e os problemas que exigem soluções não tradicionais são exemplos de situações que despertam habilidades matemáticas para além dos contextos sociais e de seus usos.

Nesse sentido, com objetivo de caracterizar o jogo como recurso de ensino faz-se necessário que ele apresente desafio aos alunos, além de entretenimento. Assim, quando da proposição de um jogo didático por um professor, em sala de aula, ele estará possibilitando aos estudantes poderem elaborar estratégias variadas e compartilhá-las com os colegas. O professor permitirá, então, que os estudantes ampliem os seus conhecimentos a partir de reflexões conjuntas com os colegas de turma, e entre todos estes e o professor.

Além da ludicidade promovida pelo jogo da Coloração Total é importante ressaltar que cada situação descrita nas estratégias tomadas por Bob e Alice estão bem alinhadas com a proposta de um jogo didático e podem ser exploradas por professores de matemática em contato com os seus alunos, visando não só enriquecer o conhecimento sobre teoria dos grafos, mas também a resolução prática de problemas matemáticos e tomada de decisões no cotidiano.

Destacamos algumas habilidades da BNCC correlacionadas com o jogo da Coloração Total:

- (EF07MA15) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos;
- (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidos utilizando os mesmos procedimentos;
- (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

7 Considerações Finais

Durante a pesquisa, foi possível verificar que alguns documentos curriculares nacionais, tal como a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, citam, sugerem e incentivam a utilização de jogos combinatórios como recursos didáticos, promovendo diversas formas de pensamento, de interação e de colaboração entre os estudantes.

Muito embora propomos um olhar sobre o jogo da Coloração Total a partir dos ciclos C_3 e C_4, fomos capazes de entender a complexidade em fornecer argumentos suficientemente precisos a fim de justificar os valores para o número cromático total do jogo. Projetamos um estudo profundo do jogo da Coloração Total sobre os demais ciclos, promovendo outras questões que certamente contribuirão para o desenvolvimento do jogo e tornarão o ensino da matemática ainda mais desafiador e interessante.

Referências

[1] M. Behzad. "Graphs and Their Chromatic Numbers". Tese de doutorado. Michigan State University, East Lansing, MI, 1965.

[2] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. **Graph Theory**. Canada: Springer, 2008. ISBN: : 978-1-84628-969-9.

[3] A. L. C. Furtado. "Jogos Combinatórios em Grafos: Jogo Timber e Jogo de Coloração". Tese de doutorado. PESC/COPPE/UFRJ, 2017.

[4] G. Pólya. "A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático". Em: **2o reimpr. Rio de Janeiro: interciência** (1995).

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0450