

Modelos Matemáticos Não-Lineares para Estimar os Meses de Gestação de águas da Raça Crioula

Régis S. Quadros,¹ Aline S. Muniz,² Vinicius Ferrucci,³ Daniela Buske,⁴ Pollyane Vieira da Silva⁵

Instituto de Física e Matemática/UFPEl, Pelotas, RS

Bruna da Rosa Curcio,⁶ Gabriela Castro da Silva,⁷ Paloma B. Joanol Dallmann⁸

Faculdade de Veterinária/UFPEl, Pelotas, RS

Resumo: O estudo sobre a órbita fetal ocular através de exame ultrassonográfico trans-retal   uma técnica bastante conhecida por especialistas da área veterinária. Este método   capaz de estimar com confiabilidade a idade gestacional de águas nos primeiros meses de gesta o, porém quando o potro torna-se maior dificulta a realiza o deste exame e torna-se de difícil acesso a medi o da órbita. A partir deste fato, buscamos estudar modelos matemáticos capazes de estimar com maior precisão o tempo gestacional de águas da raça Crioula.

Palavras-chave.  rbita, Modelos Matemáticos, Tempo Gestacional,  guas Crioulas

1 Introdu o

Para garantir um acompanhamento adequado da gesta o em  guas gestantes e facilitar a prepara o para o parto,   crucial determinar a data prevista para o nascimento dos potros, porém nem sempre   possível identificar o tempo gestacional com precisão, especialmente em casos onde a concep o ocorre naturalmente em rebanhos. Para isso existem métodos que tentam estimar a data gestacional, como, por exemplo, através do comprimento da órbita fetal.

Durante as fases iniciais da gesta o, aproximadamente até os 70 dias,   viável realizar exames de palpa o para avaliar o desenvolvimento fetal e obter resultados confiáveis, no entanto,   medida que o feto se desenvolve, a palpa o torna-se menos eficaz devido ao aumento de tamanho, podendo não ser possível a obten o da medida da órbita [1]. O procedimento que permite a medi o do comprimento da órbita fetal   denominado exame ultrassonográfico trans-retal, o qual pode fornecer indícios da idade gestacional. Neste exame   feita a conten o dos animais em local específico e realiza-se o esvaziamento do reto de forma manual [1]. A obten o das medidas da órbita fetal ocular   feita por exame ultrassonográfico, com auxílio de um transdutor linear via transretal. Entretanto,   importante ressaltar que o uso dessa técnica demanda tempo e equipamentos específicos. Assim, o estudo de modelos matemáticos se torna uma ferramenta útil nesta análise.

¹quadros99@gmail.com

²alinesm48@gmail.com

³vinicius.taveiros@hotmail.com

⁴danielabuske@gmail.com

⁵vieirapolly3@gmail.com

⁶curciobruna@hotmail.com

⁷gabicastrovini@gmail.com

⁸dallmannpaloma@gmail.com

A proposta deste trabalho é a utilização de modelos não-lineares para analisar a relação do crescimento da órbita fetal ocular com os meses de gestação de éguas Crioulas. Para tanto, foram utilizados os modelos matemáticos Logístico, Gompertz, Bertalanffy, e Chanter [4].

Um conjunto de dados de éguas da raça Crioula, coletados entre os anos de 2020 a 2022, serviu de base para o estudo. Estes dados foram obtidos pelos autores deste trabalho e que fazem parte da Faculdade de Veterinária da UFPel. Para avaliação da qualidade do ajuste dos modelos matemáticos aos dados experimentais, foi utilizado o desvio médio absoluto (DMA).

2 Modelos Não-Lineares

Os modelos de regressão não-lineares escolhidos para desenvolvimento do estudo foram: Logístico, Gompertz, Chanter e Bertalanffy. Estes modelos possuem gráficos com curvas sigmóides, ou seja, seus gráficos possuem a forma de S [4].

2.1 Modelo Logístico

O modelo Logístico é uma função matemática utilizada para modelar o crescimento de uma população ou fenômeno que apresenta um crescimento limitado. Este modelo foi proposto por Pierre François Verhulst em 1838. Ele é frequentemente empregado em campos como biologia, economia, demografia, marketing e entre outros, para descrever o comportamento de sistemas que atingem um limite de crescimento ao longo do tempo.

O modelo Logístico segue a seguinte parametrização:

$$Y(x) = \frac{\beta_1}{1 + e^{-\beta_2 - \beta_3 x}}, \quad (1)$$

em que β_1 , β_2 e β_3 são parâmetros deste modelo.

Tem-se que β_2 pode assumir valores tanto positivos quanto negativos, mas β_1 e β_3 assumem valores positivos somente [4].

A interpretação dos parâmetros pode ser feita da seguinte maneira, onde β_1 é a capacidade de sustentação do meio, β_2 é a taxa relativa máxima de crescimento e β_3 é a razão entre a quantidade que falta para atingir a assíntota β_1 e o valor inicial Y_0 [4].

2.2 Modelo Gompertz

O modelo Gompertz foi proposto por Benjamin Gompertz em 1825. O modelo foi originalmente usado para descrever tabelas atuariais contendo as probabilidades de sobrevivência e morte em uma população [4].

Esta equação descreve um crescimento que desacelera exponencialmente ao longo do tempo. O modelo Gompertz é particularmente útil para descrever fenômenos que apresentam uma fase de crescimento rápido seguida por uma fase de crescimento mais lento que então se aproxima de um limite superior.

A equação do modelo Gompertz é dada por:

$$Y(x) = \beta_1 \cdot e^{-e^{-\beta_2 \cdot (x - \beta_3)}}, \quad (2)$$

em que β_1 , β_2 e β_3 são parâmetros da equação.

Neste modelo, todos os parâmetros da equação são positivos. Ele também possui algumas semelhanças com o modelo Logístico, como seus parâmetros β_1 que representam a assíntota superior à direita. Examinando-o, pode-se ver que $Y = \beta_1$ é a assíntota horizontal à direita e $Y = 0$ é a

assíntota horizontal à esquerda, com concavidade ascendente em $x < \beta_3$ e concavidade descendente em $x > \beta_3$ [4].

Enquanto o modelo Logístico é simétrico, o Gompertz é assimétrico em relação aos seus pontos de inflexão.

2.3 Modelo Chanter

O modelo Chanter foi proposto por Denis Osborne Chanter em 1976. Este modelo foi originalmente proposto para representar dados de crescimento de organismos nos quais o crescimento inicial aumenta exponencialmente e depois assintoticamente.

O modelo Chanter pode ser representado pela equação:

$$Y(x) = \frac{\beta_1 \cdot \beta_2}{\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) \cdot e^{\left(-\frac{\beta_3}{\beta_4} \cdot (1 - e^{(-\beta_4 x)})\right)}}, \quad (3)$$

em que β_1 , β_2 , β_3 e β_4 são parâmetros do modelo.

Com o objetivo de representar um crescimento exponencial, os parâmetros tem de serem positivos, com exceção do β_4 , que pode tomar valores negativos. De forma geral, β_1 representa o valor da interseção da função com o eixo das ordenadas. Para pequenos valores de β_4 , o parâmetro β_2 representa o limite assintótico superior da função. Em relação aos últimos dois parâmetros, sua interpretação prática não é trivial e requer estudos mais abrangentes para classificar suas influências.

2.4 Modelo Bertalanffy

O modelo de Von Bertalanffy, também conhecido como teoria geral dos sistemas, foi proposto pelo biólogo austríaco Ludwig von Bertalanffy no ano de 1938, com o intuito de analisar o aumento de peso em peixes [3]. A teoria fornece uma abordagem interdisciplinar para compreender e explicar sistemas complexos em vários campos do conhecimento, como biologia, psicologia, sociologia e economia.

O modelo de Bertalanffy pode ser representado pela seguinte equação:

$$Y(x) = \beta_1 \cdot (1 - e^{-k \cdot x}). \quad (4)$$

3 Métodos e Materiais

3.1 Medida da Órbita Fetal Ocular

Para a pesquisa está sendo utilizada uma tabela contendo os dados de medição da órbita fetal de éguas da raça Crioula, coletados entre os anos de 2020 a 2022 pelos autores deste trabalho e que fazem parte da Faculdade de Veterinária da UFPEL. Estas medições foram monitoradas do 5º ao 10º mês de gestação, momento onde o feto se desenvolve com maior proporção. As gestações foram monitoradas desde o momento da concepção até o parto normal. Permitindo identificar o mês de gestação em cada exame em que foram realizadas as medidas das órbitas.

Para obtenção das medidas da órbita fetal ocular o transdutor é introduzido via transretal sendo posicionado ao longo do útero e varrido da esquerda para a direita até que a órbita seja encontrada. Depois de encontrada, a imagem é paralisada e a órbita é medida [1]. Na Fig. 1 temos uma imagem ultrassonográfica mostrando como a órbita ocular é capturada e medida.

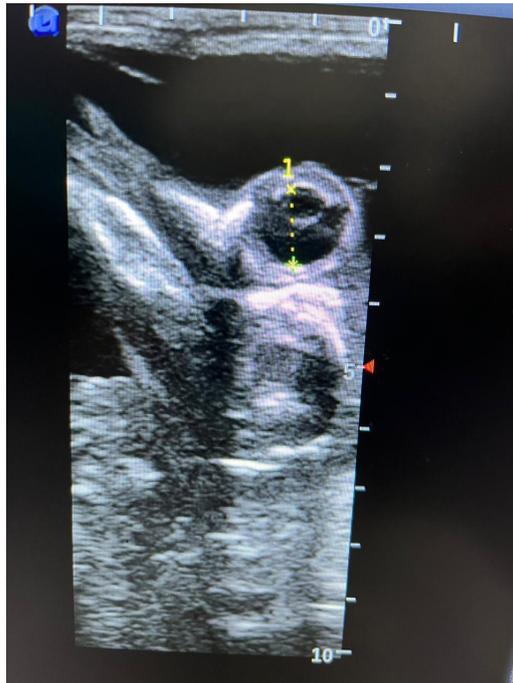


Figura 1: Imagem ultrassonográfica da órbita fetal ocular. Fonte: Dos autores 2024

3.2 Simulação numérica

Percebe-se que cada raça possui particularidades singulares, por isso a importância de encontrar um modelo matemático que descreva os dados específicos para cada raça de éguas, sendo neste caso a Crioula.

Para análise de dados e geração de parâmetros foi utilizado o programa Python, utilizando o método *curve fit* da biblioteca *scipy optimize* para ajustar os modelos estatísticos aos dados. A função *curve fit* é usada para ajustar uma função a um conjunto de dados, minimizando o erro quadrático médio entre os dados observados e os valores preditos pela função. Na Tab. 1, são apresentados os parâmetros utilizados em cada um dos modelos descritos no trabalho.

Tabela 1: Parâmetros gerados.

Modelos	Parâmetros			
	β_1	β_2	β_3	β_4
Logístico	3.1	-1.42	0.44	--
Gompertz	3.13	0.38	2.45	--
Bertalanffy	3.17	0.32	1.48	--
Chanter	0.16	3.63	1.15	0.22

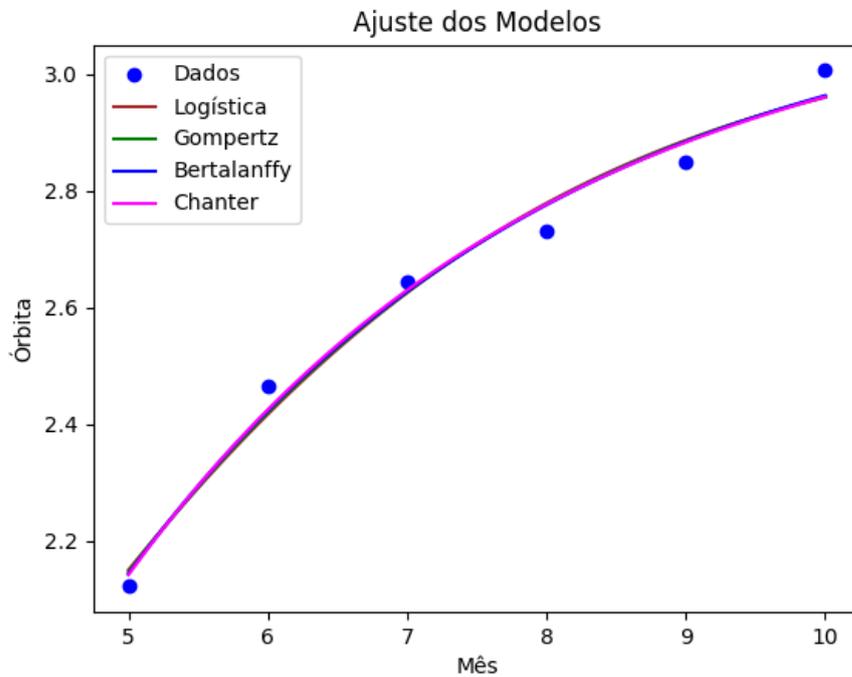


Figura 2: Gráfico comparativo de todos os modelos. Fonte: Dos autores 2024

Os gráficos das curvas para os modelos Chanter, Gompertz, Bertalanffy e Logístico são descritos na Fig. 2. Neles, é possível perceber que todos os modelos se adaptam muito bem aos dados reais.

O desvio médio é uma medida estatística que quantifica a dispersão ou variabilidade dos dados em relação à média. Ele fornece uma indicação da magnitude média dos desvios individuais dos valores observados em relação à média dos dados. Em outras palavras, o desvio médio representa a média dos valores absolutos das diferenças entre cada observação e a média do conjunto de dados.

O cálculo do desvio médio absoluto foi realizado utilizando a equação

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}, \quad (5)$$

onde n é a quantidade de dados da amostra. Na Tab. 2, é mostrado o resultado dos cálculos do desvio médio absoluto para cada um dos modelos, sugerindo que o modelo que melhor se ajusta aos dados é o modelo de Chanter.

Tabela 2: Desvio Médio.

Modelos	DMA
Logístico	0.03807
Gompertz	0.03614
Bertalanffy	0.03420
Chanter	0.03369

Portanto, ao verificar a qualidade dos ajustes em modelos estatísticos, um desvio médio baixo é desejável, indicando um bom ajuste do modelo aos dados observados. No entanto, é importante considerar outras medidas de desempenho do modelo em conjunto com o desvio médio absoluto para obter uma avaliação abrangente da qualidade do ajuste. Note que entre os valores descritos na seção 2, o modelo de Chanter é o que obteve o menor valor em comparação com os demais modelos, atingindo 3.3×10^{-2} .

Com base no DMA, tem-se indicativos de que o modelo de Chanter é o que melhor se ajusta aos dados reais, portanto a equação de predição deste modelo, para o cálculo dos meses de gestação, é a descrita pela seguinte equação:

$$Y(x) = \frac{0.5808}{0.16 + 3.47e^{-5.227(1 - e^{-0.22x})}} \quad (6)$$

Analisando o comportamento das curvas e utilizando o desvio médio para concluir qual curva melhor se ajusta aos dados, notou-se que todos os modelos matemáticos tiveram um comportamento satisfatório, com pouca variação entre eles. O desvio médio é muito utilizado para analisar comportamentos de modelos matemáticos, quanto mais próximo de zero, melhor é o modelo. É importante destacar que quanto maior o número de critérios utilizados, mais segura será a indicação do melhor modelo que se ajusta aos dados reais [2]. Todos os modelos estudados mostraram-se adequados, sendo o de Chanter o único que possui quatro parâmetros, o que garante uma maior flexibilidade no ajuste dos dados.

4 Considerações Finais

Nota-se, a partir do estudo realizado, que o modelo que melhor se ajusta aos dados reais da órbita fetal ocular é o modelo de Chanter. Embora ambos ajustem muito bem os dados analisados, este é o único modelo entre os demais que possui quatro parâmetros, tornando-se um facilitador no momento da análise dos dados reais. O próximo passo deste estudo terá como foco a análise de outros indicadores para aperfeiçoar os critérios na determinação da qualidade do ajuste.

Referências

- [1] F. P. Hartwig, L. Antunez, R. S. dos Santos, F. P. Lisboa, L. F. M. Pfeifer, C. E. W. Nogueira e B. R. Curcio. “Determining the gestational age of crioulo mares based on a fetal ocular measure”. Em: **Journal of Equine Veterinary Science** 33.7 (2013), pp. 557–560.
- [2] M. R. Teixeira Neto, J. F. da Cruz, H. H. N. Faria, E. S. Souza, P. L. S. Carneiro e C. H. M. Malhado. “Descrição do crescimento de ovinos Santa Inês utilizando modelos não-lineares selecionados por análise multivariada”. Em: **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal** 17 (2016), pp. 26–36.
- [3] J. Scapim e R. C. Bassanezi. “Modelo de Von Bertalanffy generalizado aplicado a curvas de crescimento animal”. Em: **Biomatemática-Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC-UNICAMP** 18 (2008).
- [4] P. V. da Silva. “Modelo não linear Chanter: uma aplicação aos dados de crescimento de frutos do cacauero”. Tese de doutorado. Universidade de São Paulo, 2018.