Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação de Eliminação Iterada de Estratégias Dominadas a Modelos de Competição Entre Dois Jogadores

João P. C. Oliveira[1], Olívia S. Gomes[2]
UNIJUI, Ijuí, RS
Sérgio C. Bezerra[3]
UFPB, João Pessoa, PB

Resumo. O presente artigo apresenta a aplicação de uma ferramenta retirada da Teoria dos Jogos chamada Eliminação Iterada de Estratégias Estritamente Dominadas (EIEED). Foi construído e aplicado em linguagem Python, um algoritmo para resolução de uma situação hipotética de conflito entre duas naves espaciais. Para ganhar, um dos jogadores deve escolher uma série de trajetórias sendo que uma escolha errada significa sua destruição. A análise ocorre da perspectiva de um dos jogadores e modelos de distribuição de probabilidade para confrontar a probabilidade de acerto usando (EIEED) com escolhas aleatórias. No geral a utilização de (EIEED) se mostrou mais vantajosa que a escolha aleatória.

Palavras-chave. EIEED, Probabilidade, Teoria dos Jogos, Dominância.

1 Introdução

Atingir objetivos é um dilema presente em qualquer instância, seja na vida pessoal como no setor econômico, nos planejamentos empresariais, nas organizações corporativas, enfim, em todos setores que se pode pensar. Atreladas a esse dilema estão as estratégias. Um campo da matemática aplicada que faz uso de estratégias sabiamente formuladas para o processo de tomadas de decisão é a Teoria dos Jogos, que corresponde a um conjunto de ferramentas criadas para auxiliar o entendimento das decisões resultantes da interação entre jogadores [2].

As estratégias de dominância utilizadas para solucionar alguns problemas da Teoria dos Jogos tem a função de orientar um jogador a tomar uma decisão que lhe garanta o melhor ganho [1]. Com elas é possível traçar um plano de escolhas para cada ponto de decisão, formando uma sequência completa de movimentos através dos conjuntos de informações disponíveis, tendo em vista os melhores valores oferecidos para se chegar no objetivo final [4].

Diante disso, o presente trabalho, faz uso da ferramenta retirada da Teoria dos Jogos chamada Eliminação Iterada de Estratégias Estritamente Dominadas (EIEED) para modelar a interação entre dois jogadores na perspectiva de vitória e derrota do jogador 1 que será denominado J1. O conjunto de estratégias aqui utilizadas compreende um programa de instruções que indicará qual linha de ação os jogadores adotarão durante toda partida.

[1]joao.carau@sou.unijui.edu.br
[2]olivia.gomes@sou.unijui.Edu.br
[3]sergio@ci.ufpb.br

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0349 © 2025 SBMAC

2 Materiais e Métodos

2.1 Modelagem de Problema de Competição entre dois Jogadores

Neste trabalho, modela-se um situação de confronto entre dois jogadores aqui nomeados de J1 e J2. A competição se alonga por 6 fases cujo resultado implica na destruição de um dos adversários, sem possibilidade de equilíbrio.

O J2 está atirando constantemente contra o J1 onde um único acerto implica na destruição de J1. O J1 deve passar ileso pelas 6 fases para conseguir desferir um tiro certeiro que com certeza, destruirá J2. Não existe possibilidade de J1 acertar J2 até que passe pela fase 6.

Cada fase representa um espaço de confronto onde J2 ataca J1 e o mesmo tenta desviar dos ataques e passar para a próxima fase. O resultado desse confronto é modelado através de uma comparação de duas matrizes A_1 e A_2.

Assumindo que:

$$N = \{J1, J2\}$$

Então:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix},$$

O conjunto de possibilidades é dado por: $A_i = a_i, i = 1, 2, ...9.$. A comparação é feita pela função recompensa $u_i = (a_i, b_i)$ de tal que se $a_i > b_i$ então naquela célula o J1 será o vencedor, o caso contrário ele é derrotado. Dado um espaço S, os elementos das A_1 e A_2 a serem comparados representam subespaços de S onde em cada subespaço é aplicada a função utilidade u_i, como mostra a Figura 1.

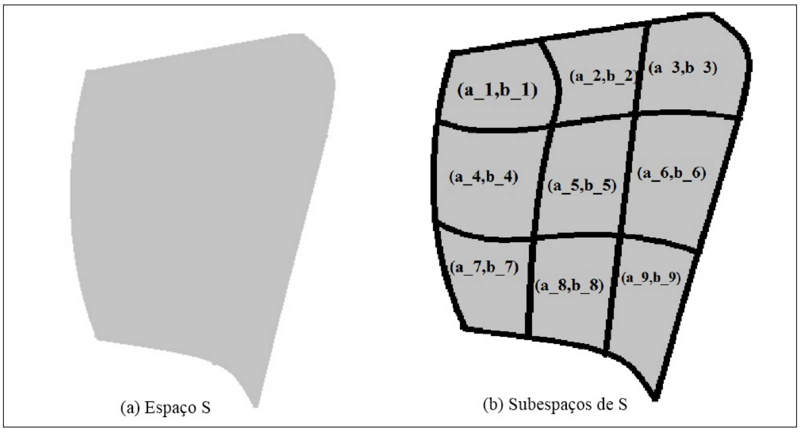

Figura 1: Espaço S. Fonte: dos autores

Neste modelo, J1 escolhe uma linha da matriz A_1, ou seja, $C_1 = \{linha1, linha2, linha3\}$ e J2 escolhe uma coluna em A_2, ou seja, $C_2 = \{coluna1, coluna2, coluna3\}$, as escolhas ocorrem simultaneamente. O resultado é a função utilidade aplicada sobre a intersecção da linha escolhida por J1 e da coluna J2. As matrizes são geradas aleatoriamente obedecendo os seguintes critérios:

- As primeiras matrizes para J1 e J2 são geradas aleatoriamente;
- Caso J1 seja derrotado na fase 1, ou em qualquer outra fase, a comparação cessa e é exibida a mensagem de vitória para J2;

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0349

© 2025 SBMAC

- Caso J1 seja vitorioso na fase 1, ele passa para a fase 2 e assim por diante, sua matriz A_1 será mantida fixa;
- Na vitória do J1 para a fase 1 e demais fases, será gerada uma nova matriz para J2 para cada fase;
- Todas as matrizes serão geradas segundo uma distribuição de probabilidade (Uniforme, Poisson e outras não comuns definidas abaixo).
- Empate na função utilidade, não será sendo considerado vitória para nenhum dos jogadores;

2.2 Algoritmo Baseado em EIEED

A estratégia EIEED funciona em etapas de comparação e eliminação [3]. Nas etapas de comparação, duas matrizes auxiliares são criadas e as quais terão seus elementos compostos por 0 ou 1 da seguinte forma:

$$matriz1[i][j] = 1,$$

, se $a_j > b_j$, e

$$matriz1[i][j] = 0,$$

caso contrário. Enquanto

$$matriz1[i][j] = 1,$$

se $a_j < b_j$ e

$$matriz1[i][j] = 0$$

caso contrário. Em resumo as matrizes $matriz1$ e $matriz2$ investigam quais linhas para J1 e quais colunas para J2, são mais vantajosas. Nas etapas de eliminação são eliminadas linhas ou colunas nas matrizes A_i e ocorrem conforme os dados obtidos em $matriz1$ e $matriz2$.

Primeiro verifica-se em quais linhas J1 tem mais opções de vitórias. As células de $matriz1$ que são iguais a 1 representam os estados em que J1 vence, enquanto as células que são iguais a 0 são os estados em que J1 perde. Somando-se os elementos de cada linha, identifica-se quais linhas tem mais vitórias para J1, em seguida elimina-se a linha que tiver menos ou nenhuma vitória.

Verificações para $matriz1$

- Se a soma das linhas de $matriz1[i]$ forem iguais, nenhuma linha é eliminada;
- Se a soma das linhas de $matriz1[i]$ forem diferentes entre si, a linha que tiver menor soma será eliminada;
- Caso duas linhas em $matriz1[i]$ tenha soma igual mas menor que a terceira, as duas com soma inferior serão eliminadas;
- Caso duas linhas em $matriz1[i]$ tenha soma igual, e maior que a terceira, esta terceira linha será eliminada;
- Caso todos os elementos de $matriz1$ sejam iguais a 1, a vitória é automaticamente atribuída a J1.

Verificações para $matriz2$

- Se a soma das colunas de $matriz2[i]$ forem iguais, nenhuma coluna é eliminada;
- Se a soma das colunas de $matriz2[i]$ forem diferentes entre si, a coluna que tiver menor soma será eliminada;

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0349 © 2025 SBMAC

- Caso duas colunas em $matriz2[i]$ tenha soma igual mas menor que a terceira, as duas com soma inferior serão eliminadas;
- Caso duas colunas em $matriz2[i]$ tenha soma igual, e maior que a terceira, esta terceira coluna será eliminada;
- Caso todos os elementos de $matriz2$ sejam iguais a 1, a vitória é automaticamente atribuída a J2.

Essa rotina se desenrola em etapas sucessivas e iteradas conforme segue:

1. Gerar $matriz1$;
2. Se não houver vencedor definido, eliminar linha, caso permitido;
3. Exibir $c1$ e $c2$ que são as matrizes A_i após etapas 1 e 2 anteriores;
4. Gerar $matriz2$ aplicado a $c1$ e $c2$;
5. Se não houver vencedor definido, eliminar coluna caso permitido;
6. Exibir $c1$ e $c2$ que são as matrizes A_i após etapas 4 e 5 anteriores;
7. Repetir processo caso não haja vencedor definido;

Uma ressalva é que neste trabalho não se segue estritamente a eliminação iterada, o algoritmo elimina linhas e/ou colunas que tem o mesmo nível de desvantagem para J1 e J2. Caso duas linhas ou colunas escolhidas possua o mesmo nível de desvantagem, então ambas serão eliminadas.

2.3 Definição dos modelos de competição para serem resolvidos pelo algoritmo IESD

Os modelos foram gerados utilizando variáveis aleatórias para escolher os elementos das matrizes que representam as ações de J1 e J2. Eles correspondem ao Caso 1 e seus Sub-casos.

- 1.0) A_1 e A_2 se distribuem conforme uma variável aleatória uniforme [1,10];
- 1.1) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 uma variável aleatória uniforme [1,11];
- 1.2) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 como uma variável aleatória uniforme [1,12];
- 1.3) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 como uma variável aleatória uniforme [1,13];
- 1.4) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 como uma variável aleatória uniforme [1,14];
- 1.5) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 como uma variável aleatória uniforme [1,15];
- 1.6) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 como uma variável aleatória uniforme [1,16];

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0349 © 2025 SBMAC

- 1.7) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 como uma variável aleatória uniforme [1,17];

- 1.8) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 como uma variável aleatória uniforme [1,18];

- 1.9) A_1 se distribui conforme uma variável aleatória uniforme [1,10] e A_2 como uma variável aleatória uniforme [1,19];

3 Resultados e Discussão

Segue abaixo a tabela exibindo os dados sobre as vitórias para J1 para o Caso 1 e seus Sub-casos.

Tabela 1: Resultados Caso 1.

Nº Simul./Casos	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
1000	22	7	2	0	0	0	0	0	0	0
2000	40	13	1	0	0	0	0	0	0	0
3000	59	11	3	1	1	0	0	0	0	0
4000	81	22	3	1	0	0	0	0	0	0
5000	90	21	13	1	0	1	0	0	0	0
10000	181	51	17	5	0	0	0	0	0	0
20000	288	105	30	9	1	2	0	0	0	0
30000	601	161	50	8	7	4	0	1	0	0
40000	754	198	59	24	7	2	1	1	0	0
50000	933	283	90	24	7	2	1	0	0	0
100000	1904	523	152	49	6	4	4	1	0	0
200000	3830	1046	343	96	32	8	3	3	0	0
300000	5945	1563	493	160	30	17	3	0	0	0
400000	7714	2156	614	178	58	19	7	2	0	0
500000	9610	2716	726	214	84	20	8	2	0	2
1E+06	19353	5316	1505	471	144	45	13	7	1	0

As celulas diferentes de zero na tabela 1, indicam o número de vitórias onde J1 passou com sucesso pelas 6 fases. Caso J2 derrote J1 em qualquer das fases de 1 a 6, é considerdo com derrota total para J1. Pode-se observar que para o caso (1.0) a quantidade de vitórias nas 6 fases fica na casa de 2% independentemente da quantidade de simulações.

As simulações para o Caso 1 e todos os seus sub-casos serão discutidas utilizando gráficos que apresentam todos casos. Essas simulações seguem um mesmo modelo de escolha para os elementos de A_i e A_j, mas enquanto em A_i, a distribuição mantém-se inalterada, nos sub-casos (1.1) a (1.9), a distribuição para A_j é diferente em cada sub-caso, aumentando o grupo de escolhas para os elementos de A_j. E segundo os resultados tem-se que a quantidade de vitórias nas 6 fases para A_i diminui conforme a distribuição A_j tem seus parâmetros de escolha aumentados, o que era um comportamento esperado.

 © 2025 SBMAC

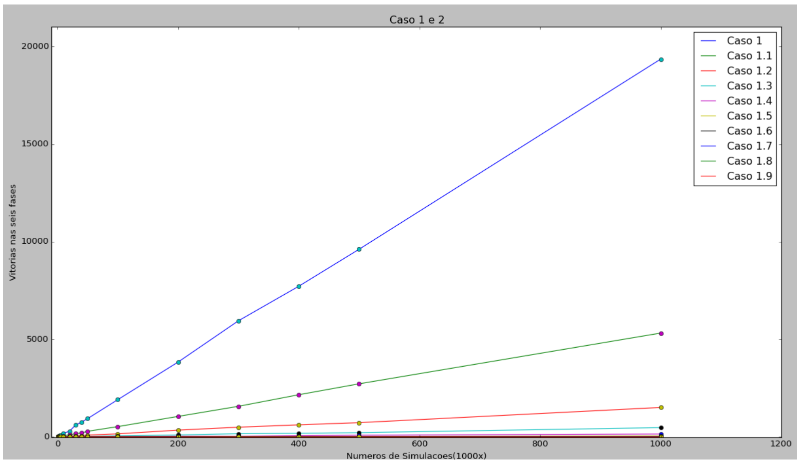

Figura 2: Tendências para Caso 1. Fonte: dos autores

Na figura 2, ao analisar somente um sub-caso, que no gráfico é representado por uma das retas, pode-se notar que existe um crescimento com tendência linear do número de vitórias nas 6 fases conforme o números de simulações aumenta, e mesmo que esse comportamento se mantenha conforme muda a distribuição para A_j, ou seja, passado de caso para caso, tem-se também que o número de vitórias cai à medida que A_j pode receber elementos com valores maiores. Nota-se que para o caso em que A_j se distribui conforme uma variável uniforme[(1,16),(1,17),(1,18),(1,19)] representado pelos Sub-casos de 1.6 a 1.9, a inclinação está muito menos acentuada com relação no número de vitórias para as 6 fases conforme aumenta o número de simulações.

Tabela 2: Proabilidade de vitória sem o uso do EIEED

Nº Simul	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
1000	0,068*	0,012*	0,012*	0	0	0	0	0	0	0
2000	0,068*	0,030*	0,012*	0	0	0	0	0	0	0
3000	0,137*	0,030*	0,030*	0,0002*	0,004*	0	0	0	0	0
4000	0,068*	0,068*	0,012*	0,0011*	0	0	0	0	0	0
5000	0,137*	0,068*	0,030*	0,012*	0	0,004*	0	0	0	0
10000	0,137*	0,068*	0,030*	0,030*	0	0	0	0	0	0
20000	0,137*	0,068*	0,03*	0,012*	0,001*	0,012	0	0	0	0
30000	0,137*	0,137*	0,068*	0,012*	0,030	0,012*	0	0,012	0	0
40000	0,137*	0,137*	0,137*	0,030*	0,030	0,030	0,004	0,004	0	0
50000	0,137*	0,068*	0,068*	0,068	0,03	0,030	0,012	0	0	0
100000	0,137*	0,137*	0,068*	0,068	0,03	0,030	0,030	0,004	0	0
200000	0,137*	0,137*	0,137*	0,068	0,068	0,012	0,012	0,012	0	0
300000	0,137*	0,137*	0,137*	0,068	0,068	0,030	0,030	0	0	0
400000	0,137*	0,137*	0,137*	0,068	0,068	0,030	0,030	0,012	0	0
500000	0,137*	0,137*	0,137*	0,137	0,068	0,068	0,030	0,012	0	0,0011
1E+06	0,137*	0,137*	0,137*	0,137	0,068	0,030	0,012	0,012	0,001	0

Ainda para o caso 1 que contempla os 10 sub-casos, calculou-se as medidas de probabilidade para J1 vencer nas 6 fases sem a utilização da EIEED que podem ser verficadas na tabela 2. Observou-se que existem 59* situações em que a taxa de vitórias para J1 superaram a probabilidade de vitória para aquela mesma situação e 42 situações em que a taxa de vitórias foi superada pela probabilidade de vitórias sem o uso de EIEED.

 © 2025 SBMAC

4 Considerações Finais

Modelos e soluções utilizando Teoria dos Jogos visam promover ao tomador de decisões opções para subsidiar decisões que em sua maioria podem ter consequências severas. Para o tomador de decisões, uma visão concreta ou mesmo uma antecipação dessas consequências pode representar uma enorme vantagem.

As simulações utilizando estratégias EIEED, mostraram-se vantajosas quanto escolha livre de estratégias para alguns casos e outros não. À medida que aumentou-se o número de simulações, o número de vitórias nas 6 fases para J1, seguiu aumentando de forma consistente. Esse aumento pode ser observado sempre quando compara-se o número de vitórias numa mesma distribuição.

Portanto, os resultados acerca da utilização da EIEED indicam e corroboram a ideia inicial de que, dependendo do modelo adotado, do problema e objetivos definidos e da abordagem escolhida, esta opção pode ser bastante vantajosa, principalmente por sua implementação computacional requerer comparações, o que pode representar uma menor complexidade do algoritmo.

Estudo sobre a complexidade do algoritmo implementado é a primeira sugestão para trabalhos futuros, bem como comparação dos mesmos modelos aqui simulados com outras estratégias envolvendo Probabilidade e Teoria dos Jogos.

Referências

[1] T. Börgers. "Iterated Elimination of Dominated Strategies in a Bertrand-Edgeworth Model". Em: **The Review of Economic Studies** 59 (1992), pp. 163–176. DOI: 10.2307/2297931.

[2] L. Koçkesen, E. A. Ok e R. Sethi. "The strategic advantage of negatively interdependent preferences". Em: **Journal of Economic Theory** 92 (2000), pp. 274–299. DOI: 10.100/jeth.1999.2587.

[3] J. Sobel. "Iterated weak dominance and interval-dominance supermodular games". Em: **Theoretical Economics** 14 (2019), pp. 71–102. DOI: 10.3982/TE2904.

[4] M. E. H. Souidi e S. Piao. "A New Decentralized Approach of Multiagent Cooperative Pursuit Based on the Iterated Elimination of Dominated Strategies Model". Em: **Mathematical Problems in Engineering** (2016). DOI: 10.1155/2016/5192423.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0349 © 2025 SBMAC