Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise e Modelagem de Problemas Usando o Software Maxima: Modelos de Equações Diferenciais Ordinárias

Marcia M. C. Cruz[1]
DMAT/UFRN, Natal, RN

Resumo. O presente trabalho tem como principal objetivo apresentar a importância da utilização de ferramentas computacionais em sala de aula. Será apresentada aqui uma proposta metodológica sobre o emprego de softwares com fins de tornar as aulas de matemática um aprendizado mais dinâmico, mais atraente e mais prazeroso. A proposta então é apresentar uma metodologia que vem sendo desenvolvida e aprimorada ao longo de vários anos de experiências, sempre buscando aperfeiçoar a forma de transmitir os conteúdos de Matemática em disciplinas como Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear, que são disciplinas normalmente com alto grau de reprovação. Para este trabalho, será feito uso do software Maxima, que tem uma plataforma amigável, é de fácil manipulação e é gratuito. A principal proposta é apresentar aplicações práticas através de modelos matemáticos desenvolvidos com a ajuda deste software, particulamente envolvendo equações diferenciais. Com o apoio do software Maxima, serão apresentados exemplos que possam incentivar o processo de construção de conhecimentos, com foco em um caso mais simples que pode ser bem explorado didaticamente: a Lei de Resfriamento de Newton.

Palavras-chave. Ensino, Ferramentas Computacionais, Equações Diferenciais, Maxima

1 Introdução

Muitas tentativas vêm sendo feitas buscando-se práticas que levem à melhoria do processo ensino/aprendizagem em Matemática. Neste contexto, será que o uso de softwares pode auxiliar o professor na transposição didática de alguns conteúdos matemáticos e, dessa forma, contribuir para a melhoria do ensino em Matemática?

O uso de softwares tende a ser uma iniciativa que poderá ter sucesso se for utilizada de forma adequada, ou seja, de forma didática, criando meios para que o aluno participe e tenha mais interesse na aula. Foram vários softwares envolvidos nestas experiências, tais como: Derive, MatLab, Geogebra, Maxima e Maple, que são os mais utilizados. Vale ressaltar que apenas dois desses softwares são livres, o Maxima e o Geogebra. Tais experiências estendem-se também à participação em eventos científicos com trabalhos nesta direção [3].

Em particular, será apresentada uma metodologia para explorar conteúdos matemáticos que envolvem Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). O desenvolvimento será feito de modo a explorar o software através de questionamentos que conduzam a resultados do problema proposto. O ensino de EDOs vem tendo algumas transformações ao longo das últimas décadas. A forma tradicional de ensino, enfatizando a resolução das EDOs apenas, tem sido articulada com outras estratégias que visam dinâmicas diferentes nos processos de ensino e aprendizagem [2]. De acordo com [5] e [7], estas mudanças podem contribuir para que o ensino das EDOs seja mais significativo para o aluno quando as abordagens analítica-algébrica, geométrica-gráfica e numérica podem ser trabalhadas com o auxílio de softwares matemáticos.

[1] marcia.castro@ufrn.br

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 11, n. 1, 2025.

2 Softwares como ferramentas no Ensino

Um bom software de matemática tem a capacidade de ajudar aluno e professor na visualização de figuras geométricas, gráficos diversos, na modelagem de problemas e interpretações geométricas, além de facilitar em cálculos algumas vezes exaustivos. Dessa forma, pretende-se aqui explorar situações que levem o aluno a perceber que pode aprender matemática de forma agradável, gostando e querendo ir mais além. A seguir, será apresentada uma sessão sobre o software Maxima, bastante conhecido no mundo acadêmico e científico. Será feita inicialmente uma breve descrição sobre o referido software e em seguida serão apresentados dois problema que envolvem estudo de EDOs.

2.1 O software Maxima

Maxima[2] [1] é um sistema de manipulação de expressões simbólicas e numéricas, incluindo diferenciação, integração, expansão em série de Taylor, transformadas de Laplace, equações diferenciais ordinárias, sistemas de equações lineares, vetores, matrizes e tensores. Maxima produz resultados de alta precisão usando frações exatas, números inteiros de precisão arbitrária e números de separador decimal flutuante com precisão variável. Pode-se ainda traçar gráficos de funções e dados em duas ou três dimensões. Maxima é sucessor de Macsyma [4], um avançado sistema de álgebra computacional desenvolvido no final da década de 1960 no Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) e que foi muito utilizado no meio acadêmico até meados da década de 1990. O Maxima é o único sistema baseado nesse programa que ainda está disponível publicamente e com uma comunidade ativa de utilizadores, em virtude de sua natureza de software aberto.

2.2 Resolução de problemas de EDO usando o Maxima

Para ilustrar o uso do Maxima na resolução de uma EDO, são enunciados abaixo dois problemas que podem ser explorados didaticamente com o uso dessa ferramenta. O primeiro problema será desenvolvido com os devidos detalhes na seção 2.3.

Problema 1: Lei de resfriamento de Newton

A velocidade de resfriamento/aquecimento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada temperatura ambiente. Desse modo, a temperatura T do corpo varia de acordo com a Lei de Resfriamento de Newton,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

onde T_a é a temperatura do ambiente. Supor que um termômetro é removido de uma sala em que a temperatura é de 70°F e colocado do lado de fora, em que a temperatura é de 10°F. Após $1/2$ minuto, o termômetro marcou 50°F. Qual será a temperatura marcada no termômetro no instante $t = 1$ minuto? Quanto tempo levará para o termômetro marcar 15°F?

Obs. Problema extraído de [8].

Problema 2: Crescimento Logístico

Consideremos a seguinte situação: são colocadas em um béquer 3 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladócero em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação, e ausência de predadores. Sabendo-se que essa população atinge o máximo de 690 indivíduos e que em 10 dias havia 240

[2] `https://maxima.sourceforge.io/pt/index.html`

indivíduos, determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional tanto à população atual quanto à diferença entre a população máxima e a população atual (crescimento logístico). A população como função do tempo, y(t), é a solução do problema

$$\frac{dy}{dt} = ky(690 - y),$$

$$y(0) = 3, \qquad y(1) = 240.$$

Obs. Problema extraído de [6].

Em ambos os problemas podem-se fazer vários questionamentos:

a) Qual a variável independente do problema?

b) Qual a variável dependente do problema?

c) Qual é o parâmetro do problema?

d) Qual é a constante do problema? Temperatura do ambiente ou do meio?

e) Qual a condição inicial do problema?

f) Qual a condição de contorno do problema?

As questões acima devem ser consideradas ao modelar o problema de acordo com a sintaxe do software. O procedimento de resolução consiste em usar os comandos necessários para apresentar os cálculos, tanto da equação geral quanto das constantes, até chegar à solução particular de acordo com as condições dadas no problema e finalmente o resultado. Isso deve ser feito passo-a-passo para que o aluno entenda todo o desenvolvimento da questão proposta sem precisar fazer cálculos. Um exemplo desse processo considerando o problema 1 é apresentado na próxima seção.

2.3 Resolução de problemas de EDO usando o Maxima

Para ilustrar o uso do Maxima na resolução de uma EDO para fins didáticos, abaixo são descritos os passos para a resolução do problema 1. Os passos estão divididos em duas etapas, cada qual referente a uma pergunta do problema – perguntas 1 e 2 expostas abaixo. O foco de cada pergunta como uma etapa visa motivar o desenvolvimento do problema. Em cada passo, são apresentados os comandos a serem digitados no software e as respostas dadas pelo mesmo.

Pergunta 1: qual a temperatura marcada no termômetro no instante $t = 1$ min?

Os passos abaixo permitem resolver a EDO do problema e determinar os coeficientes da solução geral de acordo com as condições iniciais dadas no enunciado.

i. Escrevendo a equação com o Maxima:

```
→ ode2('eq1,T,t);
```

(%o36) $T = \%e^{-(k\,t)}\left(10\,\%e^{k\,t} + \%c\right)$

Fazendo a operação, obtemos:

```
→   T(t):=10+%e^(-k·t)·c;
```

(%o37) $T(t) := 10 + \%e^{-k\,t}\, c$

ii. Cálculo da constante c:

```
→   subst(t=0,T(t))=70;
```

(%o38) $c + 10 = 70$

```
→   solve(%);
```

(%o39) $[c = 60]$

Assim

```
(%i3) T(t):=10+%e^(-k·t)·60;
```

(%o3) $T(t) := 10 + \%e^{-k\,t}\, 60$

iii. Cálculo de k:

```
(%i4) subst(t=1/2,T(t))=50;
```

(%o4) $60\,\%e^{-\left(\frac{k}{2}\right)} + 10 = 50$

```
(%i5) solve(%,k);
```

(%o5) $\left[k = 2\log\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

Substituindo o valor de k em $T(t)$, obtemos

```
(%i6) T(t):=10+%e^(-(2·log(3/2))·t)·60;
```

(%o6) $T(t) := 10 + \%e^{-\left(2\log\left(\frac{3}{2}\right)\right) t}\, 60$

iv. Calculando o valor da temperatura em $t = 1$:

```
(%i7) T(1);
```

(%o7) $\frac{110}{3}$

Em ponto flutuante:

```
(%i11) T(1)=float(110/3);
```

$$\text{(\%o11)} \quad \frac{110}{3} = 36.666666666666664$$

Pergunta 2: quanto tempo levará para o termômetro marcar 15°F?

Uma vez determinados os coeficientes da solução geral do problema que satisfazem as condições iniciais dadas no enunciado, tem-se uma função $T(t)$ bem definida. É possível assim obter T para um dado t, bem como o valor de t para uma dada temperatura T.

Calculando o t para $T = 15$:

```
(%i13) solve(10+%e^(-(2·log(3/2))·t)·60=15,t);
```

$$\text{(\%o13)} \quad \left[t = \frac{\log\left(-(2\sqrt{3})\right)}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}, t = \frac{\log(2\sqrt{3})}{\log\left(\frac{3}{2}\right)} \right]$$

```
(%i14) float(%);
(%o14) [t = 2.4663034623764317 (3.141592653589793 %i + 1.2424533248940002),
        t = 3.0642669370271824]
```

Portanto, como resposta final, o valor de t será aproximadamente igual a 3.0.

No caso do problema 2, o desenvolvimento é análogo e apresentamos aqui sua resposta:

$$y(t) = \frac{690ce^{690kt}}{1+ce^{690kt}} = \frac{690e^{690kt}}{229+e^{690kt}} = \frac{690}{229e^{-690kt}+1} = \frac{690}{229e^{\frac{-\ln\frac{1832}{15}}{10}t}+1}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{690}{229\left(\frac{1832}{15}\right)^{-\frac{t}{10}}+1}.$$

3 Conclusões

O uso de novas tecnologias como os softwares podem solucionar problemas encontrados no âmbito educacional desde o ensino fundamental ao superior. De um modo geral, os softwares matemáticos continuam sendo uma proposta promissora que deve ser vivenciada em sala de aula para motivação da aprendizagem e a ruptura da postura passiva do aluno. De acordo com o que foi apresentado no presente trabalho, pode-se concluir que a principal função dos softwares não resulta na substituição do professor, mas sim em auxiliá-lo em uma atividade conjunta que propicia aos alunos uma interação com as tecnologias do mundo globalizado. As atividades propostas neste trabalho tiveram como objetivo mostrar como é possível se trabalhar um problema com um software de forma a fazer com que o aluno possa explorar o máximo possível de conteúdos físicos e matemáticos no desenvolvimento de problemas envolvendo EDOs ou qualquer outro conteúdo de mesma relevância.

Referências

[1] D.J. Barnes e D. Chu. **Introduction to Modeling for Biosciences**. Springer London, 2010. ISBN: 9781849963251. URL: https://books.google.com.br/books?id=qMvSjwEACAAJ.

[2] A. A. Barros, J. B. Laudadres e D. F. Miranda. "A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1a e 2a ordem usando análise gráfica". Em: **Educ. Matem. Pesq.** 16.2 (2014), pp. 323–348.

[3] M.C. Cruz. **Usando o Software Maple como Ferramenta no Ensino da Matemática**. Minicurso I ERMAC Bauru, Jun 2008. Bauru, 2008.

[4] K.O. Geddes, S.R. Czapor e G. Labahn. **Algorithms for Computer Algebra**. Springer US, 1992. ISBN: 9780792392590. URL: https://books.google.com.br/books?id=B9tC7DOX_oUC.

[5] S. L. Javaroni. "Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagemde Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias". Tese (Doutorado em Educação Matemática). Tese de doutorado. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2008.

[6] R. J. Santos. **Introdução a Equações Diferenciais Ordinárias**. Imprensa Universitaria UFMG, 2016. ISBN: 9788574700212.

[7] P. C. M. Teixeira, L. Ribeiro, F. P. de Araújo e M. F. Soares. **Utilização do maple na resolução de um problema de Consumo de energia elétrica**. VII CIBEM. Montevideo, 2013.

[8] D.G. Zill. **Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem**. Thomson, 2003. ISBN: 9788522103140. URL: https://books.google.com.br/books?id=qdcM6PrecU4C.

