Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Lights Out em Poliedros

Wallace A. Salgueiro Jr.[1] Diego S. Nicodemos,[2] Patrícia E. de Moraes[3]
Colégio Pedro II, Profmat, Rio de Janeiro, RJ
João Pedro S. G. Costa[4]
Colégio Pedro II, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ
Fernanda Couto[5]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Pesc/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. O jogo solitário *Lights Out* é um jogo eletrônico jogado por um único jogador em um grid 5x5 em que cada célula contém um botão e uma luz indicadora. Ao pressionarmos um botão deste tabuleiro a luz da célula acionada e de suas células vizinhas trocam de estado, isto é, células acesas apagam-se, enquanto células apagadas se acendem. Considerando que há uma configuração inicial para as células do tabuleiro, isto é, todas as células encontram-se apagas, o objetivo do jogo Lights Out é determinar um conjunto mínimo de células que, ao serem pressionadas, trocam os estados de todas as células do tabuleiro, acendendo-o completamente. O Lights Out pode ser generalizado para tabuleiros de formatos distintos, democraticamente representados por grafos, de modo que as células do tabuleiro são representadas pelos vértices e células adjacentes são representadas pelas arestas do grafo. Investigamos o jogo Lights Out à luz dos poliedros e da teoria de grafos, relacionando assuntos a priori desconectados.

Palavras-chave. Lights Out, Grafos, Poliedros, Ensino Básico

1 Introdução

O jogo **Lights Out** foi introduzido por Sutner [8], em 1989, no contexto da teoria de grafos. Sutner mostrou que sempre é possível alterar o estado de todos os vértices de um grafo inicialmente desligado. O jogo pensado sobre grafos torna a sua jogabilidade mais acessível e democrática ao passo em que é simples e barato construir um grafo utilizando apenas lápis e papel, ou mesmo através de um desenho no chão ou em um quadro negro. A Figura 1 fornece um exemplo de um tabuleiro 5x5 e de sua respectiva representação através de um grafo.

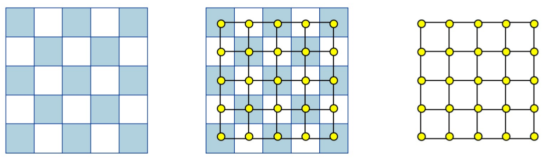

Figura 1: À esquerda um tabuleiro 5x5 e à direita uma de suas representações através de um grafo. No tabuleiro, células contendo segmentos em comum são repesentadas, no grafo, por vértices e uma aresta conectando-os. Fonte: dos autores.

[1]profwallacesalgueiro@cp2.g12.br
[2]diegonicodemos@cp2.g12.br
[3]patricia.erthal@gmail.com
[4]jpg.3000@hotmail.com
[5]nandavdc@gmail.com

O objetivo deste trabalho é inserir o jogo Lights Out em um ambiente de Ensino Básico, propondo a sua jogabilidade através de poliedros regulares. Apesar do jogo Lights Out ser um jogo solitário, a proposta que buscamos viabilizar é a de olhá-lo como um jogo cooperativo, vindo ao encontro de uma das competências específicas descritas na BNCC [3] que é a de promover a interação com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles [[3], p. 267].

Neste sentido, Groff [6] defende que o ensino deveria ser mais baseado em habilidades e competências do que em disciplinas tradicionais. Groenwald e Timm [5] afirmam que a utilização de jogos no ensino permite que os alunos façam da aprendizagem um processo interessante e até divertido. Destacam ainda que existem essencialmente três aspectos que justificam a incorporação do jogo nas aulas: o caráter lúdico inerente aos jogos, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais.

Pólya [7] identifica quatro etapas necessárias para a resolução de um problema: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e o retrospecto. Na etapa de compreensão do problema o aluno deve ser instigado a partir de perguntas, de modo a identificar os dados e condições propostas no mesmo. Em seguida, deve estabelecer um plano de ação, fazendo articulações com conhecimentos já construídos. Na etapa seguinte, o aluno deve pôr em prática o plano de ação elaborado. No retrospecto, acontece a verificação da solução encontrada, de modo a analisar se a mesma corresponde ao(s) questionamento(s) do problema.

O jogo Lights Out aborda aspectos primitivos da Matemática Combinatória em que a suposição de solução de um problema pode ser verificada, testada, comprovada ou refutada. No entanto, a demonstração da factibilidade de uma solução ótima, neste caso um conjunto de vértices de cardinalidade mínima que, ao serem acionados, conduzem à configuração final do tabuleiro (grafo) pode requerer do jogador maior laborosidade e sofisticação em seus argumentos. Isto converge para as etapas pensadas por Pólya, uma vez que a compreensão do jogo é algo trivialmente necessária. Em seguida, espera-se que haja um plano para solucionar o jogo. Este plano deve ser executado (testado) e, por fim, sua solução demonstrada.

Neste trabalho, o estudo do jogo Lights Out repousa sobre uma classe particular de grafos obtida a partir de poliedros regulares. Desta maneira, os tabuleiros considerados sâo os poliedros regulares, ou seja, o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Convém observar que vamos estudar as estruturas discretas destas figuras, por este motivo as medidas das arestas que compõem estes sólidos tornam-se irrelevantes. Neste cenário, estamos interessados na quantidade de vértices que compõem cada sólido, além das adjacências entre pares de vértices.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2, apresentamos conceitos básicos de teoria de grafos e do jogo Lights Out; na Seção 3, investigamos o jogo Lights Out sobre poliedros regulares e, finalmente, na Seção 4, apresentamos uma discussão sobre trabalhos futuros relacionados a essa pesquisa.

2 Preliminares

Discutimos, nesta seção, conceitos preliminares sobre a teoria de grafos e sobre o jogo Lights Out. As definições e resultados apresentados referentes à teoria de grafos podem ser obtidas em [1]. Para maiores detalhes sobre o atual estado da arte sobre Lights Out o leitor é convidado a consultar [2] e [4].

2.1 Sobre Grafos

Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ consiste de um conjunto não vazio $V(G)$ de **vértices** e de um conjunto $E(G)$ de **arestas**, de modo que cada **aresta** $e \in E(G)$ é um par não ordenado de vértices distintos, isto é, para toda aresta $e \in E(G)$ existem $u \in V(G)$ e $v \in V(G)$ distintos e tais que $e = \{u, v\}$ ou simplesmente $e = uv$. Neste caso, dizemos que os vértices u e v são **adjacentes** ou **vizinhos** e que a aresta e é **incidente** aos vértices u e v ou que u e v são as **extremidades** da aresta e. Duas arestas que possuem uma extremidade em comum são chamadas de **arestas adjacentes**. Quando não houver risco de ambiguidade escreveremos $G = (V, E)$ ou simplesmente G. Neste trabalho, todos os grafos considerados são **simples**, isto é, não possuem arestas **múltiplas ou paralelas** (arestas distintas que unem o mesmo par de vértices) ou **laços** (aresta que une um vértice a ele mesmo).

O **grau** de um vértice v em G, representado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes à v. Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os graus mínimo e máximo, respectivamente, dos vértices do grafo G. Um grafo é ***k*-regular** se todos os seus vértices têm grau k. Um grafo 3-regular é chamado de grafo **cúbico**. Se todos os vértices de um grafo têm graus menores que 3, então ele é chamado de grafo **subcúbico**. Um grafo em que cada par de vértices distintos está unido por uma aresta é chamado de grafo **completo**. Todo grafo completo com n vértices é $(n-1)$-regular.

A **distância** entre dois vértices u e v de um grafo conexo $G = (V, E)$ é representada por $dist_G(u, v)$ ou por $dist(u, v)$ (se não houver risco de ambiguidade) e é definida como o comprimento do menor caminho entre u e v em G. O **diâmetro** de um grafo conexo, representado por $diam(G)$, é dado pela máxima distância entre dois vértices do grafo, ou pode ser visto como o comprimento do maior caminho geodésico entre dois vértices. Dois vértices $u, v \in V(G)$ são ditos vértices **diametralmente opostos** quando $dist(u, v) = diam(G)$.

Um grafo G é **planar** se existe uma representação (desenho, imersão) de G no plano de modo que as arestas se encontrem somente nos vértices, isto é, de modo que as arestas não se cruzem. Uma tal representação de G é dita plana ou planar. Uma representação planar divide o plano em regiões chamadas **faces**. Existe sempre uma única face chamada **externa** ou **infinita**, que não está limitada (tem área infinita). Dado um grafo planar G definimos o **grafo dual** de um desenho plano $D(G)$ de G, representado por $(D(G))^*$, da seguinte forma: a cada face f de $D(G)$ corresponde um vértice f^* de $(D(G))^*$, e a cada aresta e de $D(G)$ corresponde uma aresta e^* de $(D(G))^*$ de modo que dois vértices f^* e g^* de $(D(G))^*$ são ligados por uma aresta e^* se e somente se as faces f e g em $D(G)$ são separadas pela aresta e. Na Figura 5, vemos a construção do grafo dual de um hexaedro, neste caso, um octaedro. No último frame da Figura 5 vemos uma representação planar para o octaedro.

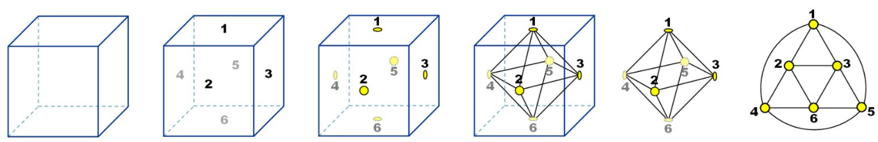

Figura 2: Hexaedro e a construção de seu grafo dual, um octaedro. Fonte: dos autores.

2.2 Sobre Lights Out

Uma definição formal para o jogo Lights Out, dada por Fleischer e Yu [4], considera um grafo simples $G = (V, E)$ contendo n vértices, de modo que cada vértice $v \in V$ possui um estado (luminosidade) inicial, isto é, cada vértice do grafo G encontra-se inicialmente desligado/apagado ou ligado/aceso. Esta configuração inicial de cada vértice do grafo é predeterminada de modo que

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0421

o jogador tem conhecimento dos estados iniciais de cada vértice do grafo. Uma etapa do jogo consiste em escolher um vértice v, que inverterá os estados de v e de todos os seus vizinhos em G de ligado/aceso para desligado/apagado ou vice-versa. Esta etapa é chamada de etapa de ativação do vértice v. A configuração inicial proposta para todos os grafos deste trabalho é aquela em que cada vértice do referido grafo está desligado/apagado.

O objetivo do jogo Lights Out é obter uma configuração em que todos os vértices do grafos encontram-se ligados/ativados através de uma sequência finita de ativações. Neste caso, dizemos que a configuração inicial é solucionável. Em outras palavras, dado um grafo $G = (V, E)$, o jogo Lights Out, sobre o grafo G, é solucionável quando existe um conjunto de vértices $S = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_k\}$, subconjunto de V, de modo que ao acionarmos os vértices de S ateramos completamente o estado do tabuleiro (grafo). Além disso, S é uma solução ótima para o jogo Lights Out sobre o grafo G, quando todo conjunto S', solução para o jogo Lights Out sobre G, é tal que $|S| \leq |S'|$. A cardinalidade de uma solução ótima para o jogo Lights Out sobre um grafo G será indicada por $\alpha(G)$. Ressaltamos que existem várias versões de estudo para o jogo Lights Out. A versão apresentada neste trabalho é a de minimização, ou seja, estamos procurando o menor conjunto que conduz à configuração final.

Um aspecto peculiar sobre as soluções ótimas para o jogo Lights Out está no fato de que o número de tais soluções é dado pelo número de permutações sobre os elementos que compõem uma solução ótima arbitrária. Em outras palavras, se há uma solução ótima para o jogo Lights Out, então a ordem em que os vértices que compõem uma solução ótima são acionados é indiferente.

Os tabuleiros considerados neste trabalho serão representados por grafos regulares. Se G é um grafo k-regular contendo n vértices, então uma cota inferior trivial para $\alpha(G)$, prevista por Brito e Sento Sé [2], é dada por $\alpha(G) \geq \frac{n}{k+1}$, pois cada toque aciona o vértice escolhido e outros k vértices adjacentes. Então o produto entre $k + 1$ e $\alpha(G)$ retornaria, no melhor cenário, a quantidade de vértices do grafo G.

3 Lights Out Sobre Poliedros

O jogo Lights Out foi historicamente concebido em uma grid 5x5, como indicado na Figura 1. Originalmente este jogo propunha que as faces do grid fossem acionadas de modo a obter a configuração desejada. Quando modelamos este grid em um grafo, o jogo Lights Out passa a ser pensado sobre os vértices deste grafo, pois os vértices do grafo representam as faces do grid. Se pensamos em jogar o Lights Out sobre os poliedros regulares, considerando que as faces destes poliedros, inicialmente desligadas/apagadas, devem ser completamente ligadas/acesas, então o jogo Lights Out, pensado nos respectivos grafos duais dos poliedros regulares, deve ser considerado sobre os vértices destes grafos.

3.1 Lights Out Sobre Tetraedros

Desejamos acender as faces do tetraedro. Note que o tetraedro é autodual, isto é, seu grafo dual também pode ser visto como um tetraedro ou como o grafo completo K_4. Isto nos diz que cada vértice deste grafo tem grau 3 e, portanto, um único toque em qualquer vértice trocará o estado de todos os vértices que compõem o grafo, como indicado na Figura 3. Neste caso, acendendo todos os vértices do grafo K_4 estamos acendendo todas as faces do tabuleiro tetraedro.

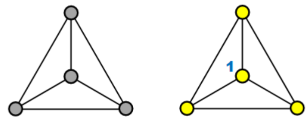

Figura 3: Lights Out sobre os vértices do tetraedro: $\alpha(K_4) = 1$. Fonte: dos autores.

3.2 Lights Out Sobre Hexaedros

O dual do hexaedro é o octaedro. Neste caso, o octaedro visto como um grafo é 4-regular e contém 6 vértices, isto é, de cada um de seus 6 vértices partem 4 arestas, consequentemente, cada toque em um vértice troca o estado de 5 vértices (inclusive do vértice acionado). Dessa forma, o primeiro toque (indicado na Figura 4 pelo rótulo 1) acende/liga 5 vértices. Para o segundo toque (rótulo 2), escolhemos o único vértice não adjacente ao de rótulo 1, o que implica em tornar os vértices de rótulos 1 e 2 os únicos acesos/ligados. O terceiro toque acionará um vértice arbitrário que esteja apagado/desligado, acendendo este e outros dois vértices e desligando os de rótulos 1 e 2. Neste momento, metade dos vértices do grafo estão acesos e a outra metade está apagada. O quarto vértice acionado, indicado pelo rótulo 4, é o vértice apagado/desligado que ainda não foi diretamente acionado em nenhuma rodada prévia. Após esta rodada, restam apenas dois vértices apagados/desligados, os únicos que ainda não foram diretamente acionados. Acionamos um destes vértices e o rotulamos de 5, obtendo apenas este vértice aceso/ligado. Finalmente, acionamos o outro vértice que ainda não foi diretamente acionado, rotulando-o de 6 e acendendo completamente o grafo octaedro, como mostra a Figura 4 e, consequentemente, as faces do hexaedro.

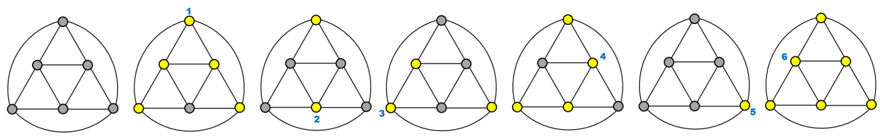

Figura 4: Lights Out sobre os vértices do grafo octaedro: $\alpha(G) = 6$. Fonte: dos autores.

3.3 Lights Out Sobre Ocatedros

O objetivo agora é acender completamente as faces do octaedro, ou seja, os vértices do grafo hexaedro (o hexaedro é o dual do octaedro). O grafo hexaedro é 3-regular e contém 8 vértices. Neste caso, cada toque em um vértice altera o estado de 4 vértices e, portanto, no melhor cenário com 2 toques acenderíamos completamente todo o hexaedro. O primeiro toque acende 4 vértices, restando 4 vértices a serem acesos. Por fim, basta pressionar um vértice desligado não adjacente a nenhum vértice aceso que obtemos a configuração esperada, como exibido pela Figura 5.

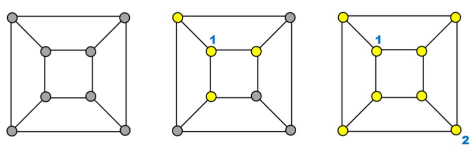

Figura 5: Lights Out sobre os vértices do grafo hexaedro: $\alpha(G) = 2$. Fonte: dos autores.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0421

3.4 Lights Out Sobre Dodecaedros

Considerando o jogo sobre as faces do dodecaedro, consequentemente sobre os vértices do grafo dual (icosaedro), temos uma estratégia simples a realizar: acionar 2 vértices que não sejam adjacentes e cujos vizinhos sejam distintos, pois cada um dos 12 vértices deste grafo tem grau 5 e um toque em qualquer um deles trocará o estado de 6 vértices, como ilustrado na Figura 6.

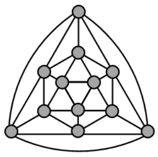

Figura 6: Lights Out sobre o grafo icosaedro: $\alpha(G) = 2$. Fonte: dos autores.

3.5 Lights Out Sobre Icosaedros

O último poliedro que servirá de tabuleiro para nossas discussões é o icosaedro que tem o dodecaedro como dual. Neste caso, o dodecaedro, visto como um grafo, está representado pela Figura 7. O grafo a ser considerado, um dodecaedro, é um grafo 3-regular contendo 20 vértices. A sequência desejada inicia-se em um vértice arbitrário (rótulo 1), em seguida acionamos um vértice a uma distância 2 do rotulado na etapa anterior, a este damos o rótulo 2. Para o terceiro toque (rótulo 3), escolhemos o vértice a distância 2 dos vértices rotulados de 1 e de 2. Esta sequência acende completamente, na Figura 7, a face externa. Escolhemos um vértice da face pentagonal central de modo a não apagar nenhum vértice aceso (rótulo 4). Pressionamos um vértice, também na face pentagonal central, a uma distância 2 do de rótulo 4, a este damos o rótulo 5. Finalmente, acionamos o vértice o único vértice a distância 2 dos de rótulos 4 e 5, acendendo completamente os vértices do dodecaedro e, consequentemente, as faces do icosaedro.

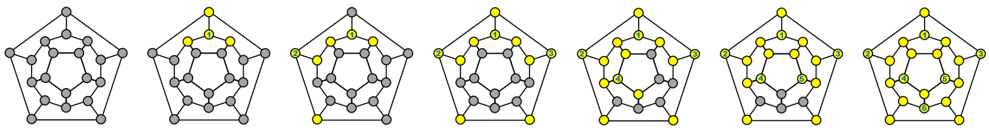

Figura 7: Lights Out sobre o grafo dodecaedro: $\alpha(G) = 6$. Fonte: dos autores.

De fato, seis toques são o mínimo para o dodecaedro. Observe que, no melhor cenário, com apenas 5 toques deveríamos ser capazes de acender todo o grafo ($\alpha(G) \geq \frac{20}{3+1} = 5$). Para isto, cada vértice do grafo deveria ter seu estado alterado exatamente uma única vez, o que é inviável. Essa inviabilidade pode ser justificada através de uma análise sobre uma de suas faces pentagonais. Para acendermos todos os vértices desta face, teríamos 3 cenários: acionar dois de seus vértices, o que faria com que um deles ficasse novamente apagado, como mostra a Figura 8a); acionar apenas um de seus vértices e tocar em vértices adjacentes aos que estão apagados. Isto também faria com que um dos vértices de uma face pentagonal vizinha ficasse apagado, Figura 8b); tocar somente em vértices adjacentes aos vértices do pentágono, o que faria com que vários vértices de faces vizinhas ficassem apagados, Figura 8c). Portanto, como algum vértice será apagado, temos que $\alpha > 5$ e, consequentemente, $\alpha = 6$.

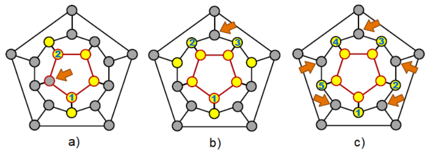

Figura 8: Face pentagonal do dodecaedro. Fonte: dos autores.

4 Considerações Finais

Apresentamos neste trabalho uma sequência didática para um jogo combinatório solitário sobre uma classe específica de sólidos. Relacionamos o problema de trocar os estados das faces de sólidos ao problema equivalente de trocar os estados dos vértices dos respectivos grafos duais destes poliedros. Neste sentido, promovemos a resolução de um problema a partir de diferentes pontos de vistas. Acreditamos que este tipo de abordagem do jogo promove investigações de estruturas para além da matemática combinatória, ensejando discussões sobre a estrutura espacial inerente aos poliedros regulares. Sobre o jogo, convém observar que no tetraedro, no octaedro e no dodecaedro os valores obtidos para a cardinalidade de uma solução ótima para o jogo Lights Out representam, de maneira trivial, o melhor cenário, enquanto os valores obtidos para o hexaedro e para o icosaedro careceram de argumentos combinatórios mais robustos, a fim de justificar que as soluções apresentadas são de fato ótimas. Pesquisas futuras sugerem a abordagem deste jogo sobre outras classes de grafos, por exemplo, sobre os prismas, as pirâmides e as bipirâmides, generalizando os resultados aqui obtidos. Vale enfatizar que propostas similares às discutidas neste trabalho propiciam um ensino de combinatória mais participativo, colaborativo e consistente, tornando a sala de aula um lugar de diálogos, trocas e descobertas.

Referências

[1] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. **Graph Theory**. Canada: Springer, 2008. ISBN: : 978-1-84628-969-9.

[2] I. B. N. Brito e W.A Sento Sé. “Lights Out: como apagar as luzes da melhor maneira possível (em grafos)”. Dissertação de mestrado. UFRRJ, 2021.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/.

[4] R. Fleischer e J. Yu. “A Survey of the Game “Lights Out!”” Em: **Space-Efficient Data Structures, Streams, and Algorithms. Lecture Notes in Computer Science**. Ed. por A. Brodnik, A. López-Ortiz, V. Raman e A. Viola. Vol. 8066. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, pp. 176–198. DOI: `https://doi.org/10.1007/978-3-642-40273-9_13`.

[5] C. L. O. Groenwald e U. T. Timm. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula**. Acessado em 23/03/2024, `https://www.somatematica.com.br/artigos/a1/`.

[6] J. Groff. **Menos trigonometria, mais pensamento crítico**. Online. Acessado em 23/03/2024, `http://www.bbc.com/portuguese/brasil-41182484`.

[7] G. Pólya. “A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático”. Em: **2o reimpr. Rio de Janeiro: interciência** (1995).

[8] K. Sutner. “Linear cellular automata and the Garden-of-Eden”. Em: **The Mathematical Intelligencer. Computational and Applied Mathematics** 11(2) (1989), pp. 49–53.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0421