

Homogeneização Assintótica Computacional aplicada a Problemas Viscoelásticos Lineares

Sergio C. Calvimontes,¹ Reinaldo R. Ramos,² Panters R. Bermúdez,³ Jorge A. R. Duran⁴

MCCT/EEIMVR-UFF, Volta Redonda, RJ

Resumo. O estudo concentra-se na análise de materiais compósitos bifásicos com periodicidade bi-escala e propriedades viscoelásticas lineares em um contexto unidimensional. Propõe-se um método alternativo para calcular os coeficientes efetivos derivados da homogeneização assintótica sem precisar empregar a transformada de Laplace-Carson. Para isso, são utilizadas funções lambda, também conhecidas como funções anônimas, típicas de linguagens de programação funcional. A comparação entre ambas abordagens é feita considerando critérios de complexidade e precisão computacionais.

Palavras-chave. Viscoelasticidade Linear, Homogeneização Assintótica, Função Lambda.

1 Introdução

Em 1874, Ludwig Boltzmann propõe um modelo matemático para descrever materiais viscoelásticos utilizando equações diferenciais. Neste mesmo contexto, em 1909, [10] elabora uma abordagem mais descritiva ao estudar equações integro-diferenciais em problemas não necessariamente contínuos, apresentando o conceito de “hereditariedade” em sistemas mecânicos, atualmente reconhecido como *princípio da memória*. Após esse período, o crescente aumento da utilização de polímeros na indústria demandou uma abordagem robusta que descreva a teoria da viscoelasticidade. Livros-texto como [7] e [2] (1972 e 1982, respectivamente) formalizaram conceitos reológicos, termomecânicos, aplicações em fluidos, materiais compósitos simples e casos viscoelásticos não-lineares, incorporando hipóteses da mecânica do contínuo, termodinâmica e análise variacional.

O desenvolvimento de ferramentas para análise matemática de materiais compósitos viscoelásticos mais complexos é abordado em trabalhos como [8] (1979). Livros como por exemplo [1] (1989), entre outros, formalizam a aplicação do método de homogeneização assintótica em estruturas periódicas de diferentes tipos, incluindo problemas viscoelásticos não-lineares. Embora a homogeneização assintótica simplifique a análise ao propor coeficientes efetivos, a crescente complexidade na modelagem e simulação de estruturas compostas, juntamente com a distribuição intrincada de propriedades mecânicas, requer o uso de métodos computacionais. Isso permite automatizar processos de manipulação de informação e facilitar o cálculo dos coeficientes efetivos.

Neste trabalho, apresenta-se uma metodologia que utiliza manipulação vetorizada de funções lambda, como argumento de funções mais complexas, para implementar computacionalmente a expressão analítica que calcula o coeficiente efetivo de uma estrutura compósita homogeneizada. Embora a implementação esteja focada inicialmente no caso bifásico com distribuição uniforme, visando comparação e validação com casos de estudo da literatura ([4] e [3]), a abordagem é flexível e pode ser estendida para lidar com estruturas compostas por múltiplas fases não-uniformes.

¹sergiocc@id.uff.br

²reinaldorr@id.uff.br

³pantersrb@id.uff.br

⁴jorgeduran@id.uff.br

2 Descrição e delimitação do problema

2.1 Equações de governo e constitutivas para um meio viscoelástico

Devido à natureza estática do problema, é usada a equação de equilíbrio para meios contínuos. A solução é obtida em função dos deslocamentos $u(x, t)$, seguindo a relação constitutiva entre deformações $\varepsilon(u)$ e tensões $\sigma(\varepsilon)$ [2]. Essa relação diferencial, baseada no *princípio de superposição de Boltzmann*, é a base de modelos como Maxwell, Kelvin-Voigt, entre muitos outros [2]:

$$\nabla \cdot \sigma(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^p P_i(x) \frac{\partial^i}{\partial t^i} \sigma(u) = \sum_{j=0}^q Q_j(x) \frac{\partial^j}{\partial t^j} \varepsilon(u), \text{ onde } q \geq p \geq 1. \quad (2)$$

Usando (2) e (1), o problema é expresso com P 's e Q 's representando as propriedades mecânicas em estado estacionário. A abordagem integral de Volterra [10], mais descritiva, considera o histórico contínuo de deformação por meio de uma sequência uniformemente convergente [2, 5]:

$$\sigma(x, t) = \int_0^t R(x, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varepsilon(x, t) d\tau \quad \text{ou} \quad \sigma(x, t) = \int_0^t R(x, t - \tau) d\varepsilon(x, \tau). \quad (3)$$

Atendendo ao princípio da memória [2], o *módulo de elasticidade* é o caso inicial do *módulo de relaxamento* em estado transitório, isto é $E(x) = R(x, 0)$ [8]. Entretanto, a teoria linear da viscoelasticidade é limitada na descrição de fluidos [2]; um comportamento semelhante ao sólido assume que $u(x, t)$ é suave e sem rotações locais significativas, implicando tensor $\varepsilon(u)$ simétrico:

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T], \text{ onde } \nabla u \equiv (\nabla u)^T, \quad \varepsilon(u) = \nabla u(x, t). \quad (4)$$

Um operador $\mathcal{R}(\bullet)$, interpretado como o *tensor de núcleos de relaxamento* [8], é usado para simplificar a notação de (3) [2]. Assim, substituindo (3) e (4) na equação de governo, obtém-se:

$$\nabla \cdot [\mathcal{R}(\nabla u(x, t))] = 0, \text{ onde } \mathcal{R}(\bullet) = \int_0^t R(x, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\bullet) d\tau = \int_{\varepsilon(0)}^{\varepsilon(t)} R(x, t - \tau) d\varepsilon(\bullet). \quad (5)$$

2.2 Expansão assintótica - equação homogeneizada

Um corpo heterogêneo com estrutura periódica, modelado por um subdomínio replicado (*célula básica*), é o foco da análise. Com L_j e ϵ_j como comprimento do corpo e da célula, segundo uma direção espacial j , tem-se que: $\epsilon_j \ll L_j$ [1]. No caso unidimensional não é necessário usar o índice “ j ”. Também, o problema tratado é *bi-escala* devido à distinção entre a *variável global* x e a *variável local* ou *rápida* $y = x\epsilon^{-1}$ [1, 6, 8]. Com isto, $R(x, t)$ pode ser expresso de uma forma ϵ -periódica: $R^\epsilon(x, t)$ ou $R(y, t) \equiv R(y + 1, t) \forall y \in \mathbb{D}$. Entretanto, o *coeficiente efetivo* $R(t)$ é uma distribuição independente de x e y , representando qualquer $R(y, t)$ sem oscilações [1].

O método de homogeneização propõe uma solução utilizando uma série de potências de ϵ . Consequentemente, aplicando a regra da cadeia bi-escala $d(\bullet)/dx = \partial(\bullet)/\partial x + \epsilon^{-1} \partial(\bullet)/\partial y$, tem-se:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k v_k(x, y, t) = \epsilon^0 v_0(x, y, t) + \epsilon^1 v_1(x, y, t) + \epsilon^2 v_2(x, y, t) + \dots, \quad y = \frac{x}{\epsilon}. \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\epsilon^k \mathcal{L}_{xx}(v_k) + \epsilon^{k-1} (\mathcal{L}_{yx}(v_k) + \mathcal{L}_{xy}(v_k)) + \epsilon^{k-2} \mathcal{L}_{yy}(v_k)) = 0, \quad \mathcal{L}_{\alpha\beta}(\bullet) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\mathcal{R} \left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial \beta} \right) \right]. \quad (7)$$

O operador $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ simplifica a notação, sendo $\alpha, \beta = x, y$ de forma intercambiável. As soluções v_k de (6) são obtidas por truncamento dos termos de (7) [1, 3]. A primeira solução é independente de y , ou seja, $v_0(x, y, t) = v_0(x, t)$ [1]. Esse resultado é aplicado em um problema de recorrência, onde v_k facilita a solução de v_{k+1} , conseqüentemente, é proposto o seguinte *problema local* [1]:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\mathcal{R} \left(\frac{\partial}{\partial y} N_1(y, t) \right) \right] = 0, \quad v_1(x, y, t) = N_1(y, t) \frac{\partial}{\partial x} v_0(x, t), \quad N_1(y, t) \equiv N_1(y, t) + y. \quad (8)$$

A *média sobre o período da função local* é nula, $\int_0^1 N_1(y, t) dy = 0$, por ser ϵ -periódica [1]. Este raciocínio é formalmente abordado em [1, 3, 6]. A final, é possível reescrever (6):

$$u(x, t) = v_0(x, t) + \epsilon N_1(x\epsilon^{-1}, t) \frac{\partial}{\partial x} v_0(x, t) + \epsilon^2 N_2(x\epsilon^{-1}, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x, t) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad , \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (9)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon) \sim \mathcal{O}(n) = \max |u(x, t) - v_0(x, t)| \leq \frac{1}{n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^+. \quad (10)$$

Onde n é a quantidade de regiões Ω_i da célula. Note que (9) mantém as mesmas condições de contorno e iniciais do problema original: $u(0, t) \equiv v_0(0, t)$, $u(1, t) \equiv v_0(1, t)$ e $u(x, 0) \equiv v_0(x, 0)$ [1]; assim, o *problema homogeneizado* e o *coeficiente efetivo* podem ser expressos da seguinte forma:

$$R_H(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x, t) = 0, \quad R_H(t) = \left[\int_0^1 \frac{1}{R(y, t)} dy \right]^{-1}. \quad (11)$$

Em muitos casos, abordagens semi-analíticas, como a transformada de Laplace ou a transformada de Laplace-Carson, são utilizadas para simplificar o cômputo da Equação (3) e especialmente da Equação (11) para cálculo de $R_H(t)$. No entanto, a transformação inversa nem sempre é direta, frequentemente exigindo ferramentas numéricas, conhecidas por seu custo computacional relativamente alto e por sua convergência numérica muitas vezes instável.

3 Metodologia

3.1 Algoritmo computacional

Para o cálculo do coeficiente efetivo, desde um ponto de vista computacional, o argumento de entrada é a função $R(y, t)$, enquanto o de saída é $R_H(t)$. Por essa razão, é utilizada uma sequência finita de invocações de funções lambda, cuja sintaxe permite manipular funções como argumentos de outras funções, o que se mostra vantajoso nesse contexto. Da mesma forma, os modelos constitutivos de cada região aninhada na célula periódica são argumentos de entrada para a definição de $R(y, t)$. Este raciocínio pode ser escrito utilizando o formato de funções computáveis:

$$\{R_H(t)\} = \text{RH} \{R(y, t)\}, \quad \{R(y, t)\} = \text{R} \{R_1(y, t), \dots, R_n(y, t)\}. \quad (12)$$

A função computável **RH** implica que a discretização temporal não está vinculada com a precisão do resultado se, somente se, y é independente de t ; note que isto não é verdadeiro em problemas que consideram *envelhecimento* ou *periodicidade transitória*. A função computável **R** monta os arranjos de dados, utilizando vetorização, para a implementação eficiente de **RH**. Contudo, o poder computacional deste tipo de sintaxe não é evidente em implementações que envolvem laços (**for**, **dowhile**, etc.), os quais são evitados. Assim, a discretização temporal é implementada como um vetor **t** de comprimento ajustado ao caso de estudo específico. Esta última consideração permite aproveitar, em toda invocação de uma função computável, bibliotecas e hardware otimizados para o processamento vetorizado de dados (manipulação de *arrays* ou arranjos).

Por outro lado, a discretização de y está diretamente relacionada ao nível de precisão necessário para garantir reproduzir a distribuição de propriedades de cada região Ω_i da célula. Essa precisão pode ser ajustada nas próprias ferramentas de integração numérica, porém está sujeita aos limites de precisão do hardware disponível. Assim, a discretização espacial é implementada como um vetor y de comprimento que resulte compatível com quantidade necessária de partições do período ϵ .

O seguinte algoritmo, em pseudo-código, descreve a função R aninhada na função RH :

```

1: procedure COEFICIENTE EFETIVO
2:   Condições de contorno - Dirichlet, na célula, isto é:  $y(1) = 0$  e  $y(\text{end}) = 1$ .
3:   Discretização de  $t$ . Discretização de  $y$ , interna às regiões  $\Omega_i$ . Note que  $y(k) - y(k-1) < \epsilon$ .
4:   function Biblioteca de materiais, repetir para  $i = 1 : n$ 
5:     function Material  $i$ 
6:       Funções auxiliares para as Equações (15) e (16):  $R_{i1}(y, t), R_{i2}(y, t), \dots$ .
7:       Kernel, Equações (15) ou (16):  $\{R_i(y, t)\} = Ri \{R_{i1}(y, t), R_{i2}(y, t), \dots\}$ 
8:       Retorna o vetor:  $Ri$ . Equações (15) e (16) em função da discretização de  $t$ .
9:     end function
10:    Retorna os vetores:  $R1, \dots, Ri, \dots, Rn$ . De acordo com a quantidade de fases.
11:  end function
12:  function Função lambda periódica  $R(y, t)$ , esta é a função computável  $R$  da Equação (12).
13:    Montagem de acordo com o caso de estudo. Retorna:  $R = R1 \cup \dots \cup Ri \cup \dots \cup Rn$ 
14:  end function (No caso unidimensional bifásico trata-se apenas de um vetor  $R1 \cup R2$ )
15:  Função lambda para inversão, elemento-por-elemento, de  $R$ , isto é:  $iR = 1./R$ .
16:  Função lambda para integração por quadratura de  $iR$ , e.g:  $SE = \text{quadv}(iR, y(1), y(\text{end}))$ .
17:  Função lambda para inversão, elemento-por-elemento, de  $S$ , isto é:  $RH = 1./S$ .
18: end procedure

```

As operações que introduzem erros de precisão numérica incluem a inversão de R , a integração de iR e a inversão de S . Enquanto a integração de iR é computacionalmente intensiva, as demais etapas são procedimentos complementares de manipulação de dados. Este algoritmo, sem laços, é otimizado para linguagens de programação como MATLAB® ou GNU Octave. Se os vetores Ri forem independentes de y , elimina-se a necessidade de discretização espacial. Neste caso específico, a instrução que inverte o conjunto R elemento-por-elemento é análoga à seguinte expressão:

$$R(t) = \frac{1}{\int_{\Omega_1} \frac{1}{R_1(t)} dy + \int_{\Omega_2} \frac{1}{R_2(t)} dy + \dots + \int_{\Omega_n} \frac{1}{R_n(t)} dy} = \frac{1}{\frac{\delta y_1}{R_1(t)} + \frac{\delta y_2}{R_2(t)} + \dots + \frac{\delta y_n}{R_n(t)}}. \quad (13)$$

Cada δy_i representa o comprimento da região Ω_i ; neste caso, a integração por quadratura não é mais requerida. Dentro do contexto dos casos de estudo a serem abordados, estruturas bifásicas unidimensionais com distribuição uniforme, ou seja: $n = 2$, a expressão (13) é simplificada:

$$R(t) = \frac{R_1(t)R_2(t)}{(1 - \phi)R_1(t) + \phi R_2(t)}, \quad \delta y_1 = \phi, \quad \delta y_2 = 1 - \phi. \quad (14)$$

Assim, a função RH neste trabalho corresponde à equação (14); iR e S não são usadas.

3.2 Resultados do estudo de compósitos bifásicos viscoelásticos

Apesar das limitações dos modelos viscoelásticos baseados em arranjos mola-amortecedor, o modelo de *sólido linear padrão* [7] é adotado nos dois primeiros casos de estudo. A função lambda periódica, $R(y, t) \rightarrow R = R1 \cup \dots \cup Rn$, pode ser implementada com parâmetros como o módulo elástico E_i , módulo viscoso η_i , módulo viscoelástico M_i , e uma razão de relaxamento $r_i = \eta_i/M_i$.

$$R(y, t) = \begin{cases} R_1(t) = E_1 + M_1 e^{-t/r_1} & \text{se } 0 \leq y \leq \phi \in \Omega_1, \\ R_2(t) = E_2 + M_2 e^{-t/r_2} & \text{se } \phi < y \leq 1 \in \Omega_2, \end{cases} \quad (15)$$

onde cada $R_i(t)$ apresenta um comportamento único, de acordo com o modelo viscoelástico Zener, o que é abordado nos primeiros dois casos de estudo. No terceiro caso, a estrutura da Equação (15) é utilizada com um modelo diferente. A função lambda, composta por quatro parâmetros (α , β e λ sem interpretação física, e μ como módulo de cisalhamento), é modelada pela fração exponencial núcleo de *Scott Blair e Rabotnov*, apresentada na equação abaixo:

$$R_i(t) = \lambda_i \mu_i t^{\alpha_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^k t^{k(1-\alpha_i)}}{\phi [(k+1)(1-\alpha_i)]} \in \Omega_i, \quad \beta_i = \frac{1}{\tau_i^{1-\alpha_i}}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (16)$$

As Equações (15) e (16) foram abordadas em [3, 4] usando a versão analítica da transformada de Laplace-Carson, de acordo com o princípio de correspondência viscoelástico-elástico. A versão numérica (como o programa “invlap” do MATLAB®) da transformada inversa foi usada para retornar ao domínio temporal. Os resultados desses trabalhos são comparados com os do algoritmo proposto neste trabalho, que não utiliza transformações, considerando três casos de estudo.

3.2.1 Caso 1: Compósito unidimensional bifásico viscoelástico - Validação

Os exemplos numéricos unidimensionais abordados em [3, 4] são casos que não possuem uma interpretação física, mas estão corretamente montados para a validação e comparação. O presente trabalho propõe, paralelamente, parâmetros adicionais ajustados para situações mais realistas, utilizando coeficientes extraídos de tabelas de materiais. Ambos os grupos de parâmetros são ilustrados na Figura 1, considerando diferentes valores de fração volumétrica ϕ . Para fornecer comparações práticas, são apresentados dados de propriedades de vidros de sílica aquecidos e polímeros fragilizados, de acordo com [9]. No primeiro caso, de acordo com a Equação (15), os dois grupos de parâmetros são os seguintes (note que o primeiro grupo não possui unidades físicas):

- (a) $E_1 = 0.6$, $M_1 = 0.4$, $\eta_1 = 0.12$; $E_2 = 1.36364$, $M_2 = -0.363636$, $\eta_2 = -0.0991734$.
- (b) $E_1 = 70$ GPa, $M_1 = 70$ GPa, $\eta_1 = 10$ TPa s; $E_2 = 20$ GPa, $M_2 = 20$ GPa, $\eta_2 = 5$ TPa s.

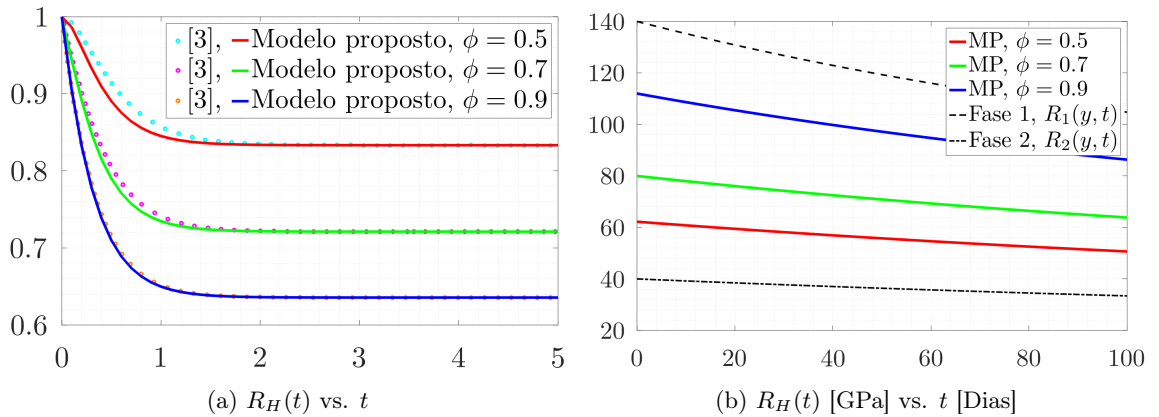


Figura 1: Coeficiente efetivo de um compósito viscoelástico bifásico em função do tempo e da fração de volume ϕ . (a) Comparação com [3], (b) Exemplo com dados realistas. Fonte: dos autores.

De acordo com o primeiro grupo de parâmetros, Figura 1a, é possível verificar que não há uma perfeita semelhança entre as curvas de [3] (linhas tracejadas) e as curvas calculadas com o modelo presente (MP, na legenda). Essa diferença é mais acentuada quando a fração volumétrica aumenta. No entanto, o valor assintótico, quando $t > 2$, é o mesmo para ambas as abordagens.

3.2.2 Caso 2: Compósito unidimensional bifásico elástico-viscoelástico

Este caso é semelhante ao anterior, comparando grupos de parâmetros mas usando valores numéricos diferentes, todos ilustrados na Figura 2 (o primeiro grupo não tem interpretação física):

(a) $E_1 = 3.162$, $M_1 = 0$, $\eta_1 \rightarrow \infty$; $E_2 = 0$, $M_2 = 2.512$, $\eta_2 = 78.5$.

(b) $E_1 = 80$ GPa, $M_1 = 0$ Pa, $\eta_1 \rightarrow \infty$ Pa s; $E_2 = 0$ Pa, $M_2 = 70$ GPa, $\eta_2 = 9$ TPa s.

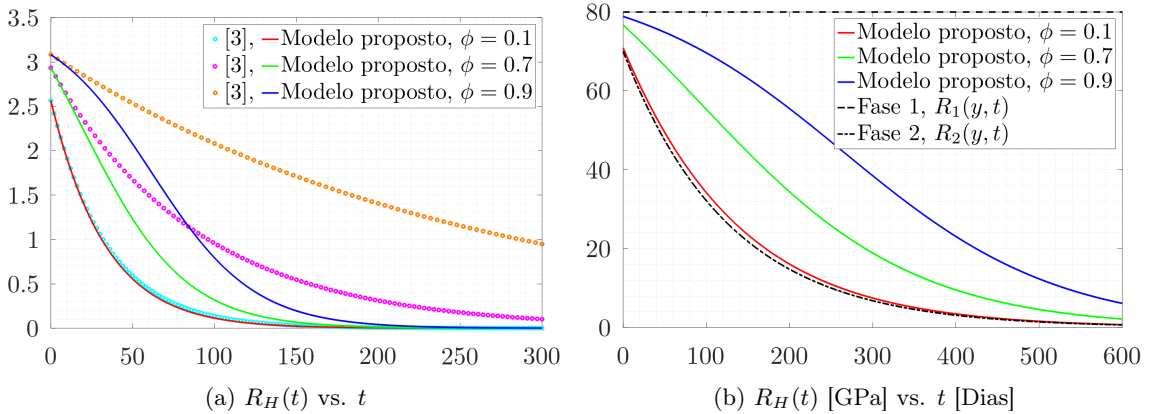


Figura 2: Coeficiente efetivo de um compósito viscoelástico bifásico em função do tempo e da fração de volume ϕ . (a) Comparação com [3], (b) Exemplo com dados realistas. Fonte: dos autores.

Existe uma diferença entre os modelos, mais evidente quando um dos materiais é elástico.

3.2.3 Caso 3: Compósito unidimensional bifásico Núcleo Scott Blair-Ravotnov

Os parâmetros do terceiro caso, de acordo com as Equações (15) e (16), são:

(a) $\beta_1 = 0.98$, $\beta_2 = 0.45$, $\phi_1 = 49.6$, $\phi_2 = 29.6$, $\mu_1 = 1.76 \cdot 10^6$, $\mu_2 = 0.98 \cdot 10^6$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.47$.

(b) Semelhante do que (a), porém adicionando as frações volumétricas $\phi = 0.2$ e $\phi = 0.8$.

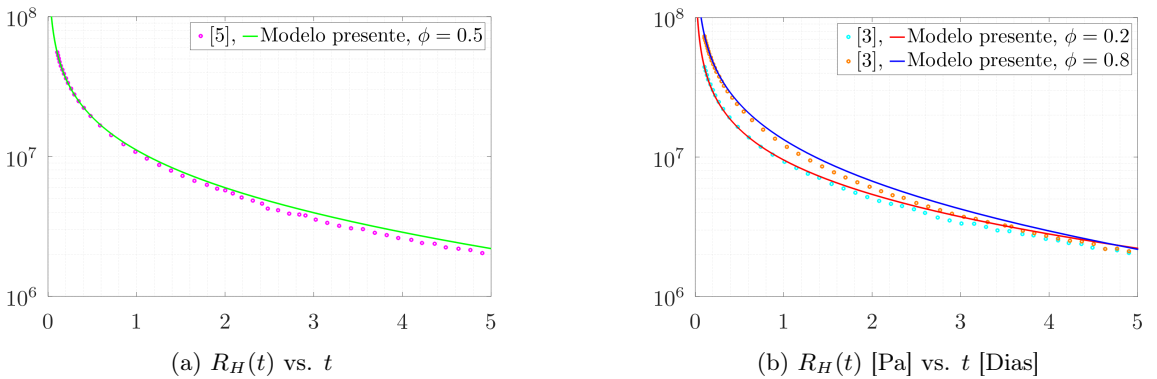


Figura 3: Coeficiente efetivo de um compósito viscoelástico bifásico com fração exponencial em função do tempo e da fração de volume ϕ . Comparação com (a) [4] e (b) [3]. Fonte: dos autores.

Na Figura 3, existe compatibilidade entre o modelo presente e [3, 4]. A oscilação nas linhas tracejadas desta figura indica a imprecisão na importação gráfica de curvas (e.g. WebPlotDigitizer).

4 Considerações Finais

Os compósitos viscoelásticos unidimensionais são investigados sob diferentes modelos constitutivos em vários casos de estudo. A homogeneização assintótica bi-escala é utilizada para obter problemas locais e coeficientes efetivos, seguindo uma implementação computacional no domínio temporal. Os resultados são comparados com uma abordagem que emprega a transformada de Laplace-Carson, demonstrando equivalência sob condições específicas. A montagem de modelos constitutivos no domínio transformado (Laplace-Carson) parece ser delimitada por estas condições.

5 Agradecimentos

Calvimontes S. C. agradece ao CNPq pela bolsa de doutorado através do METALMAT da UFRJ, processo no. 161181/2019-8 e à Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da UFF. Rodríguez-Ramos R. agradece à chamada CNPq N^o 09/2023, PQ-2 Productividade em Pesquisa, processo n^o. 307188/2023-0 e ao Edital UFF PROPPI n^o. 05/2022. Rodríguez-Bermúdez P. agradece o apoio da CAPES, processo no. 88887.708539/2022-00 e à UFF.

Referências

- [1] N. Bakhvalov e Panasenko G. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media - Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials**. Kirillov, A. A et al. Vol. 36. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989. ISBN: 978-94-009-2247-1. DOI: 10.1007/978-94-009-2247-1.
- [2] R. M. Christensen. **Theory of Viscoelasticity - An Introduction**. 2^a ed. New York: Academic Press Inc., 1982. ISBN: 0-12-174252-0.
- [3] O. L. G. Cruz. “Homogeneización de compuestos viscoelásticos, lineales, sin envejecimiento y con periodicidad generalizada”. Dissertação de mestrado. Universidad de La Habana - Universidad de Matanzas, 2018.
- [4] O. L. G. et al Cruz. “Effective viscoelastic properties of one-dimensional composites”. Em: **American Research Journal of physics** 3.1 (2017), pp. 1–17.
- [5] E. Gurtin M. E. and Sternberg. “On the linear theory of viscoelasticity”. Em: **Archive for Rational Mechanics and Analysis** 11 (1962), pp. 291–356. DOI: 10.1007/BF00253942.
- [6] G. Panasenko. **Multi-scale Modelling for Structures and Composites**. 1^a ed. Netherlands: Springer, 2005. ISBN: 1-4020-2982-9.
- [7] A. C. Pipkin. **Applied Mathematical Sciences - Lectures on Viscoelasticity Theory**. 2^a ed. Vol. 7. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1972. ISBN: 0-387-96345-6.
- [8] B.E. Pobedrya. “Application of the theory of viscoelasticity to composite materials”. Em: **Mechanics of Composite Materials** 15 (1979), pp. 271–278. DOI: 10.1007/BF00623991.
- [9] D. G. Rethwish e W. D. J. Callister. **Material science and engineering - An introduction**. 9^a ed. Vol. 136. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2000. ISBN: 978-1-118-32457-8.
- [10] V. Volterra. “Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell’elasticità”. Em: **Atti della reale accademia dei lincei rendiconti** S5 18-2.2 (1909), pp. 295–301.