Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Dinâmica entre espécies: uma análise do Modelo Lotka-Volterra

Kailaine de Oliveira da Silva[1] Jocelaine Cargnelutti [2]
UTFPR, Toledo, PR

A modelagem matemática pode ser entendida como o processo de traduzir problemas reais através de equações matemáticas, permitindo a análise, e até mesmo a previsão de fenômenos complexos. Destaca-se a modelagem de equações diferenciais, que envolvem derivadas de uma ou mais variáveis dependentes relacionadas a variáveis independentes [5]. Ao abordarmos de equações diferenciais é importante ressaltarmos que elas são excelentes ferramentas matemáticas, sendo essenciais para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos, além de processos que evoluem ao longo do tempo. Esse conceito tem inúmeras aplicações em diversas áreas, desde a física até a biologia[5]. Na biologia, por exemplo, as equações diferenciais são empregadas para descrever o crescimento de populações, e até mesmo a competição entre espécies. As interações entre espécies e organismos em seus habitats podem resultar no aumento de uma espécie, levando a expansão da população de predadores devido ao aumento de alimentos e, consequentemente, á redução da população de presas devido á predação. Essa dinâmica foi observada e, em 1926, o matemático italiano Vito Volterra (1860- 1940), propôs um modelo simples de predação, que tinha como objetivo explicar os níveis oscilatórios na captura de peixes no Mar Adriático. Esse modelo também é conhecido como modelo de Lotka-Volterra, visto que as mesmas equações estavam sendo estudadas em 1925, por Alfred Lotka (1880- 1949), [1] ; [3] ; [6] apud [4].

Neste sentido, os objetivos deste trabalho são estudar as equações do sistema não linear que regem o modelo Lotka-Volterra e encontrar os pontos de equilíbrio onde ambas as populações estão estabilizadas.

Para representar esse modelo matemático leva-se em consideração x(t) e y(t), as densidades de presas e predadores respectivamente, e t o tempo, assim surgem as hipóteses que regem o modelo: Na ausência de predadores, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população existente, assim $dx/dt = ax$, quando $y = 0$, onde $a > 0$; a população de predadores se extingue na falta de presas, pois assim os predadores não tem alimentos para sua sobrevivência. Logo $dy/dt = -cy$ quando $x = 0$, onde $c > 0$; o número de encontros entre presa e predador é proporcional ao produto das duas populações, ou seja, xy; sendo que a cada encontro a população de predador tende a crescer e a da presa diminuir, assim a população de predador cresce a uma taxa βxy , e a taxa de crescimento de presas é diminuída por um termo da forma -αxy, em que α e β são constantes positivas. Em consonância a essas hipóteses, vem o modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy = y(\beta x - c) \end{cases} \tag{1}$$

Onde a representa a taxa de crescimento da população de presas na ausência de predadores, c é a taxa de mortalidade da população de predadores na ausência de presas, α é a taxa de decréscimo da população de presas devido a interação com os predadores, e β é a taxa de crescimento populacional

[1]kailaineoliveira669@gmail.com
[2]jocelainecargnelutti@gmail.com

dos predadores em decorrência da predação, [1]; [3]; [7] apud [4]. Essas duas equações forjam a interação entre as duas espécies.

Os pontos críticos do sistema (1) são as soluções das seguintes equações algébricas:

$$x(a - \alpha y) = 0 \tag{2}$$

$$y(\beta x - c) = 0 \tag{3}$$

Os pontos críticos do nosso sistema (1) são:

$P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$

Nosso objetivo é analisar as soluções do sistema linear correspondente próximo a cada ponto crítico [1] . Porém o ponto P_1 é de menor interesse, pois analisar um cenário sem presas e predadores não contribui para uma compreensão significativa do sistema, pois assim ambas as espécies estarão extintas. Para uma melhor análise iremos nos concentrar no ponto P_2, onde ambas populações se sustentam.

Analisando o ponto crítico P_2 assim concluímos que temos 2 autovalores distintos e imaginários puros, segundo [2] "[...] o ponto pode ser de centro, caracterizando um sistema marginalmente estável, ou seja, aplicando qualquer perturbação, o estado inicial irá se diferenciar do estado final [...]", isto é, as trajetórias orbitam na vizinhança do ponto crítico. A construção de um retrato de fase do sistema (1), proporciona uma representação visual clara do comportamento das espécies, essa visualização é essencial para identificar padrões de comportamentos, destaca-se nesse caso oscilações ciclícas do sistema, visto que as trajetórias são curvas fechadas.

Considerações finais: nesse trabalho foi apresentado um breve resumo sobre o modelo clássico de Lotka-Volterra, que se baseia na interação de duas espécies. Além diso realizamos uma análise da estabilidade do modelo, investigando os pontos críticos e as propriedades dinâmicas associadas a eles. Para os próximos passos pretende-se encontrar as trajetórias do sistema (1), reduzindo-o a uma equação de primeira ordem, e realizar uma análise biológica mais detalhada do modelo, considerando aspectos como competição, taxas de reprodução, entre outros.

Referências

[1] W Boyce e R. C DiPrima. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Vol. 10. LTC Rio de Janeiro, 2010. ISBN: 9788521627357.

[2] T. F Cantalice. "Modelo de Lotka-Volterra com inclusão de termos perturbativos e capacitivos". Em: **Universidade Estadual Paulista (Unesp)** (2012).

[3] J. D Murray. **Mathematical biology I: an introduction**. Online. acesso em 27/02/2024. 2002.

[4] R. B Pata e R. E Cara. "Modelo de Lotka-Volterra para a Dinâmica Predador-Presa". Em: **9° SIEPE Universidade Federal do Pampa** (2017), pp. 1–6.

[5] M. M Pereira et al. "Equações Diferenciais Fracionárias com Ajuste Dimensional". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1** (2023).

[6] M Rafikov. "Notas do minicurso: aplicaçao dos modelos matemáticos no controle de populaçoes". Em: **UFSC, Santa Catarina** (2003).

[7] D. G Zill e M.R Cullen. **Equações Diferenciais. Volume 01. 3ª Edição**. Pearson Education, 2001. ISBN: 8534612919.