

Modelo SIR Fracionário: Uma Aplicação para a Hepatite A

Lislaine Cristina Cardoso¹

UEMS, Naviraí - MS

Fernando Luiz Pio dos Santos²

Instituto de Biociências, Unesp, Botucatu - SP

Rubens de Figueiredo Camargo³

Faculdade de Ciências, Unesp, Bauru - SP

A hepatite A é uma infecção causada pelo vírus HAV o qual ataca as células do fígado. A infecção ocorre principalmente por meio do contato direto com fezes contaminadas ou por ingestão de água ou alimentos contaminados [7]. A incidência da doença está relacionada com fatores socioambientais, e ocorre com maior frequência em áreas com más condições de higiene e saneamento básico.

Com intuito de compreender a dinâmica da doença ao longo do tempo, tem-se estudado formas de prevenção, controle e erradicação [8]. Do ponto de vista matemático, novas ferramentas vêm sendo usadas, como por exemplo a modelagem matemática.

No processo de modelagem, para quantificar a dinâmica dos sistemas epidemiológicos, abordagens determinísticas ou estocásticas podem ser usadas [1]. A escolha do modelo e das ferramentas a serem utilizadas estão relacionados com as hipóteses matemáticas e epidemiológicas do problema estudado [6]. Desse modo, quanto mais próximas da realidade estão essas hipóteses, mais precisa será a descrição do fenômeno e mais exatas serão as conclusões fornecidas pelo modelo.

Neste trabalho, será apresentado um modelo compartimental determinístico SIR (suscetível-infectado-recuperado) para descrever a dinâmica da Hepatite A [6]. Modelos desse tipo dividem a população em diferentes compartimentos com base no estado de saúde e na interação entre os indivíduos. Cada compartimento representa uma categoria específica, como suscetíveis, infectados, recuperados ou outros estados relevantes para o problema em questão.

O modelo será formulado por meio de equações diferenciais fracionárias [2]. A teoria do cálculo fracionário é uma importante ferramenta para descrever a dinâmica de sistemas complexos em várias áreas do conhecimento, como Biomatemática, Química, Biologia, Finanças, e outros [2, 3, 5]. Além disso, a teoria do cálculo fracionário é uma ferramenta importante para refinar a descrição de fenômenos naturais, em particular aqueles que possuem dependência temporal [3].

Nesse contexto, para compreender a dinâmica da hepatite A, consideramos um modelo compartimental do tipo SIR, com três estados variáveis: indivíduos não infectados (S), indivíduos infectados (I) e indivíduos recuperados (R) [6]. Para modelar as interações entre os compartimentos, as seguintes hipóteses são assumidas:

- Todos os indivíduos nascem suscetíveis;
- O tamanho da população N é constante.
- A interação entre as populações ocorre de forma homogênea;

¹lislaine.cardoso@uems.br

²fernando.pio@unesp.br

³rubens.camargo@unesp.br

- Os indivíduos recuperados tornam-se imunes por toda a vida;
- A taxa de letalidade da doença é nula.

Assim, a dinâmica da hepatite A é descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciais fracionárias:

$$\begin{cases} D^\alpha S(t) &= \mu N - (\beta(t) + \rho)S(t) \\ D^\alpha I(t) &= \beta(t)S(t) - (\rho + \gamma)I(t) \\ D^\alpha R(t) &= \gamma I(t) - \rho R(t) \end{cases} \quad (1)$$

em que $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$ e D^α representa a derivada fracionária de Caputo de ordem α para $0 < \alpha \leq 1$, μ é a taxa de nascimentos de indivíduos, ρ é a taxa de mortes de indivíduos do compartimento. Indivíduos suscetíveis são infectados a uma taxa de infecção $\beta(t)$. A população de indivíduos infectados perderá ρ indivíduos referente a mortalidade da população e pela taxa de recuperação da doença γ . Desse modo, os indivíduos recuperados passam para o compartimento $R(t)$ de indivíduos recuperados, que também sofre o efeito da mortalidade pela taxa ρ .

Com base no modelo 1, usando o método NSFD [4] e os dados reais publicados em [9] serão feitas simulações numéricas, com o intuito de investigar a dinâmica de infecção por HAV dos indivíduos suscetíveis, ao longo do tempo. A modelagem de estratégias de tratamento serão, em seguida, efetuadas tomando-se como base esse modelo SIR fracionário da evolução temporal da hepatite A.

Referências

- [1] R. M Anderson e R. M. May. **Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control**. Oxford: Livraria da Física, 1992. ISBN: 9780198540403.
- [2] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015. ISBN: 9788578613297.
- [3] L. C. Cardoso, F. L. P. dos Santos e R. F. Camargo. “Analysis of fractional-order models to Hepatitis B”. Em: **Computational and Applied Mathematics** 4.4 (2018), pp. 1–17. DOI: 10.1007/s40314-018-0588-4.
- [4] L. C. Cardoso, F. L. P. dos Santos e R. de F. Camargo. “A construction of nonstandard finite difference scheme to fractional differential system.” Em: **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 22.2 (2022), pp. 1–10. DOI: 10.123/S2176-622320100147013.
- [5] S. M. Ciupe. “Modeling the dynamics of Hepatitis B infection, immunity, and drug therapy”. Em: **Immunological Reviews** 285 (2018), pp. 38–54. DOI: 10.1111/imr.12686.
- [6] R. B. Cristovão. “Modelo SIR: Uma Aplicação à Hepatite A”. Dissertação de mestrado. USP, 2015.
- [7] Boletim Epidemiológico. “Hepatites virais”. Em: **Secretária de Vigilância em Saúde** 50.26 (2020), p. 68.
- [8] S. E. Mwaijande e G. E. Godfrey Edward Mpogolo. “Modeling the Transmission Dynamics of Hepatitis A with Combined Vaccination and Sanitation Mitigation”. Em: **Computational and Mathematical Methods in Medicine** 2023.4 (2023). DOI: 10.1155/2023/1203049.
- [9] H. M. Nunes, M. C. P. Soares, E. M. F. Brito, M. M. Alves, O. S. C. Souza, A. M. Borges, I. S. Silva e J. F. Paixao. “Prevalência de infecção pelos vírus das hepatites A, B, C e D na demanda de um hospital no Município de Juruti, oeste do Estado do Pará”. Em: **Revista Pan-Amazônica de Saúde** 2.2 (2010). DOI: 10.5123/S2176-62232010000200013.