Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Análise dinâmica da Ponte de Tacoma: Aplicações de EDO na Engenharia Civil

Mariana M. Ramos[1] Jocelaine Cargnelutti[2]
UTFPR, Toledo, PR

Este trabalho aborda a análise dinâmica da ponte de Tacoma explorando os eventos que levaram à queda em 1940 e, utilizando-se como ferramenta equações diferenciais ordinárias (EDO), apresenta um modelo matemático que descreve os movimentos oscilatórios. A aplicação de física ondulatória juntamente das EDOs permitiu uma compreensão da interação das forças envolvidas e da resposta estrutural da ponte. Além disso, esse trabalho ressalta a importância de ambas as disciplinas (física e equações diferenciais ordinárias) no curso de engenharia civil, pois, essas são importantes não apenas para entender eventos históricos, como o estudado neste trabalho, mas também são uma ferramenta fundamental na engenharia estrutural.

A Ponte de Tacoma construída no estado de Washington tornou-se uma lição para a engenharia civil, pois a ponte colapsou quatro meses após a sua inauguração [2]. A ponte é uma estrutura longa, estreita e rasa está vulnerável aos efeitos aerodinâmicos, pois, a natureza da estrutura confere uma flexibilidade considerável. Dessa forma, as amplitudes experimentadas pela ponte estavam diretamente ligadas à geometria estrutural, à frequência nautral e ao nível de amortecimento [1]. Neste sentido, utilizando-se de propriedades físicas e a teoria de equações diferenciais é possível obter uma relação entre o colapso da ponte de Tacoma e os osciladores amortecidos. A principal característica de um oscilador amortecido são as forças não-conservativas que atuam no sistema, diminuindo assim a energia mecânica do mesmo até que o movimento cesse. Assim, para determinar a expressão (1) foi utilizada a segunda lei de Newton, somando a força restauradora e a resistência do ar e igualando a massa multiplicada pela aceleração.

$$-bv - ky = ma \tag{1}$$

A expressão (1) é uma EDO, pois a velocidade (v) e a acelreção (a) podem ser reescritas em função de y, além disso, a equação pode ser dividida por m.

$$-\frac{b}{m}\frac{dy}{dt} - \frac{ky}{m} = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{2}$$

A equação (2) é uma EDO linear, homogênea de segunda ordem, dessa forma, possui três possíveis soluções, sendo elas: Raízes reais e diferentes; Raízes reais e iguais; e Raízes complexas. Cada solução é referente a um tipo de oscilador amortecido, neste trabalho será estudado cada caso para assim definir qual melhor se aplica ao caso da ponte de Tacoma.

Para facilitar o entendimento nas deduções de fórmulas as constantes que acompanham a derivada primeira e o y serão chamadas de, respectivamente

$$\frac{b}{m} = 2d \; ; \; \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega \tag{3}$$

[1]marianamunizms145@gmail.com
[2]jocelainecargnelutti@gmail.com

. O primeiro caso a ser estudado é os que resultam em raízes reais e diferentes, logo, ao resolver-se a equação (2) é encontrado a solução expressa na equação (4).

$$y(t) = c_1 e^{((-d+w)t)} + c_2 e^{((-d-w)t)} \tag{4}$$

As constantes c_1 e c_2 são arbitrárias, assim, foi escolhido o seguinte valor para elas c_1= c_2=A/2. Ao substituir esse valor na equação (4) é possível observar uma relação com o cosseno hiperbólico, reduzindo-se à equação (5). A função do cosseno hiperbólico não é periódica, desse modo, causa um amortecimento abrupto, sendo chamado de supercrítico, e não se encaixa ao caso estudado

$$y(t) = Ae^{-dt} cosh(\omega t) \tag{5}$$

O caso das raízes reais e iguais, possui solução expressa em (6), possui um decaimento lento e não possui oscilações, considerado um amortecimento crítico. Apesar de ser um caso desejado, no geral, para amortecedores, não é uma função aplicável ao estudo desse trabalho.

$$y(t) = e^{-dt}(c_1 + c_2 t) \tag{6}$$

No último caso a ser estudado, as raízes serão complexas, assim, ao resolver a equação (2), encontra-se a solução abaixo.

$$y(t) = e^{-dt}(c_1 cos(\omega t) + c_2 sen(\omega t)) \tag{7}$$

Ao escolher c_1=A cos(δ) e c_2=A sen(δ) e substituir em (7) é possível observar a relação dos cossenos, reduzindo-se à (8). A equação (8) possui um termo oscilante ($cos(\omega t - \delta$) e um termo denominado amplitude da onda (Ae^{-dt}), o qual diminui ao decorrer do tempo até que atinja sua posição de equilíbrio. Esse caso é chamado de oscilações subamortecidas e se aplica à Ponte de Tacoma.

$$y(t) = Ae^{-dt}(cos(\omega t - \delta)) \tag{8}$$

Para ser considerado como equação do modelo vertical da Ponte de Tacoma (equação (9)), deve ser considerado o coeficiente de amortecimento, a medida da resistência dos cabos e a função que modela os ventos.

$$-b\frac{dy}{dt} - cy + w(t) = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{9}$$

Pode-se perceber que a (9) assemelha-se com a equação (2), apenas trocando as constantes. Assim, a solução mostrada em (8) é aplicável para (9). No entanto, não é possível descrever de forma numérica as amplitudes das oscilações pois (8) não considera a função que modela os ventos, pois a cada rajada de vento há alterações nos coeficientes de (8). Mas, é inegável que a ponte oscilaria e retornaria ao repouso a cada rajada de vento, e em um dia com ventos fortes e contínuos (como os registrados no dia da tragédia), a ponte teria amplitudes cada vez maiores, provocando rupturas em sua fundação, pois nesse caso, o cabo central se rompeu devido ao excesso de flexão desestabilizando o movimento vertical, causando torção e o rompimento da ponte.

Assim, é possível evidenciar que a causa do desabamento de Tacoma ocorreu devido às oscilações da ponte. Além disso, a responsabilidade pode ser atribuída a falta de conhecimento pois ainda não se conhecia o fenômeno de ressonância. Ademais é importante ressaltar a importância de disciplinas como física ondulatória e equações diferenciais ordinárias no curso de engenharia civil, porque, sem elas não seria possível definir o modelo das oscilações da Ponte de Tacoma.

Referências

[1] J. Gies. **Bridges and man**. 7a. ed. New York: Papamoa Press, 2017. ISBN: 9781787208353.

[2] M. B. Seidel e G. J. B. dos Santos. "Uma Revisão dos fenômenos aerodinâmicos relacionados ao colapso da Ponte de Tacoma". Em: **Revista de Ensino de Engenharia** 41 (2022), pp. 177–189. DOI: 10.37702/REE2236-0158.

