

## Aplicação do Método das Diferenças Finitas Implícito na Obtenção da Distribuição de Temperatura em Placa Plana

Leandro W. de Brito<sup>1</sup>, Luana C. Junges<sup>2</sup>, Jocelaine Cargnelutti<sup>3</sup>, Vanderlei Galina<sup>4</sup>  
UTFPR, Toledo, PR

As equações diferenciais parciais (EDPs) estão presentes na descrição, modelagem e análise de uma ampla variedade de fenômenos naturais, científicos e tecnológicos. Elas descrevem relações entre uma função desconhecida e suas derivadas, sendo uma forma de representar o comportamento dinâmico e as taxas de mudança em sistemas diversos, bem como entender e prever o comportamento de sistemas complexos ao longo do tempo [3]. Um importante exemplo é a equação do calor, que descreve a difusão de calor em um sólido.

Considera-se, neste estudo, a equação bidimensional do calor (1), a qual descreve a propagação do calor em duas dimensões espaciais  $(x, y)$  e uma dimensão temporal  $t$  [2],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

em que  $u(x, y, t)$  é a temperatura no ponto  $(x, y)$  no instante  $t$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  representa a taxa de variação temporal da temperatura,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  são as segundas derivadas parciais da temperatura em relação às coordenadas  $x$  e  $y$ , e  $\alpha$  é a difusividade térmica do meio. A solução dessa equação permite verificar o comportamento da temperatura em uma superfície bidimensional de acordo com condições iniciais e de contorno específicas.

Uma forma de obter uma solução particular da Equação Bidimensional do Calor é por meio da aplicação do do Método das Diferenças Finitas (MDF), o qual consiste em um método numérico utilizado para aproximar a solução de um Problema de Valor de Contorno (PVC) associado a uma EDP. O MDF consiste em reduzir um problema contínuo, com um número infinito de incógnitas, a um problema discreto, com número finito de incógnitas. Para isso, a região de interesse deve ser representada por uma série de pontos dispostos, onde a relação entre esses pontos é determinada por meio de expansões truncadas da série de Taylor que permitem a substituição das derivadas parciais por fórmulas discretas de diferenças [3].

Aplicou-se o MDF implícito (método incondicionalmente convergente) considerando uma chapa quadrada de aresta  $L = 1m$ , inicialmente a  $200^\circ C$ , onde foi estampada com uma leve indentação na forma de uma coroa circular. A temperatura atingida, graças a deformação, é de  $800^\circ C$  e a extração de calor se dá apenas pelas extremidades da chapa, por onde o calor flui para reservatórios térmicos a  $0^\circ C$ .

A solução numérica foi obtida discretizando as derivadas da equação do calor e aplicando condições iniciais e de contorno de Dirichlet,  $u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0$  e  $u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0$  [1], resultando em,

<sup>1</sup>leandrobrito@alunos.utfpr.edu.br

<sup>2</sup>luanacarolinejunges@hotmail.com

<sup>3</sup>jocelainecargnelutti@gmail.com

<sup>4</sup>vanderleigalina@utfpr.edu.br

$$\frac{u_{i,j}^{(n+1)} - u_{i,j}^{(n)}}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{u_{i+1,j}^{(n+1)} - 2u_{i,j}^{(n+1)} + u_{i-1,j}^{(n+1)}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{(n+1)} - 2u_{i,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)}}{(\Delta y)^2} \right] \quad (2)$$

Utilizou-se a linguagem de programação *Python* no desenvolvimento de um *script* <sup>5</sup> para determinar a solução numérica do PVC. As imagens na Figura 1 ilustram o resultado obtido ao considerar uma malha de 100x100 pontos na discretização de uma placa quadrada de lado 1m e adotando os seguintes valores para os parâmetros: espaçamento da malha  $h = 0,01$ , difusividade térmica  $\alpha = 0,01$  e  $\Delta t = 0,01$ .

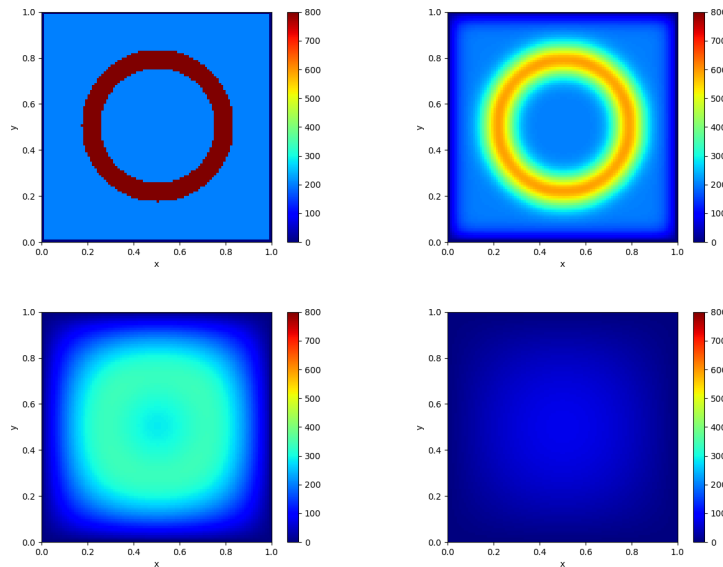


Figura 1: Solução do problema com  $t = 0$ ,  $t = 0.1$ ,  $t = 1$  e  $t = 10$ , respectivamente. Fonte: dos autores.

Conclui-se que o MDF implícito é uma ótima ferramenta para representar a distribuição de temperatura em uma placa plana e que a linguagem de programação *Python* é uma excelente opção para se trabalhar com a solução de EDPs, principalmente devido à simplicidade para se realizar os cálculos e à capacidade de gerar imagens dos resultados, com a utilização das bibliotecas *NumPy* e *Matplotlib*, respectivamente.

## Referências

- [1] B. K. Aliyu e S. F. Olatoyinbo. **Explicit and Implicit Solutions to 2-D Heat Equation**. Online. Acessado em 26/02/2024, [https://www.researchgate.net/publication/349338093\\_Explicit\\_and\\_Implicit\\_Solutions\\_to\\_2-D\\_Heat\\_Equation](https://www.researchgate.net/publication/349338093_Explicit_and_Implicit_Solutions_to_2-D_Heat_Equation).
- [2] S. J. Farlow. **Partial differential equations for scientists and engineers**. New York: Courier Corporation, 1993. ISBN: 978-0-486-67620-3.
- [3] A. O. Fortuna. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos**. 2a. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2012. ISBN: 978-85-314-1373-5.

<sup>5</sup>Disponível em: <https://github.com/LeandroWrzcionek/2dHeatEquation/blob/main/MDF%20implícito>.