Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Trajetórias Calculadas: a Matemática por trás do GPS

José E. O. Cavalcante[1], Francisco L. N. Silva[2]
URCA, Campos Sales, CE
José A. P. Nogueira[3]
URCA, Juazeiro do Norte, CE

A evolução tecnológica no mundo tem sido marcada por avanços extraordinários que revolucionaram a forma como vivemos, trabalhamos e nos conectamos. Desde a era da Revolução Industrial até os dias de hoje, testemunhamos o surgimento e aprimoramento de inúmeras tecnologias que moldaram nossa sociedade. Um exemplo emblemático desse progresso é o Sistema de Posicionamento Global (GPS).

Inicialmente desenvolvido para fins militares durante a Guerra Fria, o GPS rapidamente se tornou uma ferramenta essencial em diversos aspectos da vida moderna. Desde a navegação terrestre até a localização precisa de objetos e pessoas, o GPS revolucionou a forma como nos deslocamos e planejamos nossas atividades, oferecendo uma precisão e eficiência sem precedentes.

A equação fundamental por trás do GPS é a equação de posição, que é derivada da geometria da triangulação e da física da propagação do sinal e usa o tempo de recebimento do sinal de satélites.

Cada satélite envia um sinal contendo um *timestamp*, representando o tempo em que o sinal foi enviado. Quando o sinal é recebido, o receptor GPS registra o tempo de recebimento. A diferença entre o tempo de recebimento e o *timestamp* é chamada de atraso de tempo, e é proporcional a distância entre o satélite e o receptor.

Seja t_e o *timestamp* de quando o sinal foi enviado e t_r o tempo registrado pelo receptor quando o sinal foi recebido. A diferença de tempo,

$$\Delta t = t_r - t_e \tag{1}$$

está relacionada à distância d entre o satélite e o receptor pela seguinte equação:

$$d = c \cdot \Delta t \tag{2}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, que é aproximadamente 299.792.458 metros/segundo. Essa equação descreve uma esfera na qual o receptor GPS deve estar localizado.

Para determinar a posição exata de um receptor, a partir dos sinais de satélites, usa-se o método de trilateração. Consideremos três satélites com coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3), respectivamente, e os sinais recebidos desses satélites correspondam a d_1, d_2 e d_3, respectivamente.

A distância entre o receptor e cada satélite é dada pelas equações de distância:

$$d_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \tag{3}$$

$$d_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} \tag{4}$$

$$d_3 = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2} \tag{5}$$

[1] edinaldooliveira538@gmail.com
[2] fclucasnicolau@outlook.com.br
[3] augusto.nogueira@urca.br

onde (x, y, z) são as coordenadas desconhecidas do receptor.

Para eliminar as raízes quadradas, elevamos ao quadrado ambos os lados das equações, resultando em:

$$d_1{}^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \tag{6}$$

$$d_2{}^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 \tag{7}$$

$$d_3{}^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 \tag{8}$$

As três equações resultantes representam esferas com centros em (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) e raios d_1, d_2 e d_3, respectivamente.

A solução para essas equações é a interseção dessas três esferas, que é a posição do receptor (x, y, z).

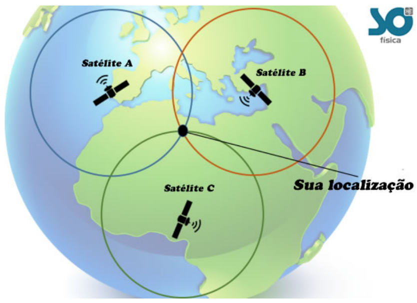

Figura 1: Triangulação a partir dos satélites. Fonte: [1].

Embora o processo possa parecer complexo, sua aplicação prática é evidente em nosso cotidiano, desde viagens de carro até atividades ao ar livre. Ao entender a matemática por trás do GPS, ganhamos uma apreciação mais profunda da incrível engenhosidade por trás dessa tecnologia onipresente, que continua a moldar e facilitar nossas vidas de maneiras inimagináveis.

Referências

[1] Só Física. **GPS - O que é, como funciona?** Online. Acessado em 15/02/2024, `https://www.sofisica.com.br/conteudos/curiosidades/gps.php`.

