Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Estudo de Modelos Populacionais de uma Espécie

Lydiane Ferreira de Souza[1] Vitória de Fátima Souza Reis [2]
CCET/UFOB, Barreiras, BA

Podemos descrever sistemas dinâmicos através de equações diferenciais que apresentam a evolução temporal das variáveis do sistema. Para sistemas lineares, podemos escrever as equações em termos que dependem da primeira potência das variáveis. Já os sistemas não lineares apresentam termos como potências, produtos e funções das variáveis que descrevem o sistema. Por exemplo, a dinâmica não linear está presente em modelos de propagação de doenças, como é o caso do modelo SIR (susceptible-infected-removed), que prevê a propagação da doença e tem sido amplamente utilizado para descrever a dinâmica da propagação da Covid-19 [1], [4]. Além desses casos, a dinâmica não linear permite descrever o crescimento populacional, como veremos neste trabalho. Este trabalho tem como foco o estudo de alguns modelos de crescimento populacional contínuo para uma única espécie. Para os modelos de Malthus e logístico resolvemos analiticamente, já que são modelos mais simples, e fizemos a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio. Já para o efeito Allee e modelo de surto de populações, realizamos a análise da estabilidade dos pontos fixos e resolvemos numericamente utilizando o algoritmo Python's LSODA [5]. O modelo mais básico para descrever o crescimento populacional de uma espécie é o modelo de Malthus ou crescimento exponencial. A equação que descreve este modelo é:

$$\dot{N} = rN, \tag{1}$$

com r a taxa de crescimento da população e $N(t)$ representa a população da espécie estudada em função do tempo. O crescimento exponencial pode modelar o crescimento de uma cultura bacteriana, como *Escherichia coli*, sendo este um modelo linear.

Em 1838, Verhulst e Pearl obtiveram a equação logística, que descreve o crescimento da *Drosophila melanogaster* [2]. O modelo logístico é um modelo não linear, descrito pela equação:

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right), \tag{2}$$

com $N(t)$ representando a população como função do tempo, $r > 0$ a taxa de crescimento da população e $k > 0$ a capacidade de carregamento da população, correspondente ao valor da população no limite em que o tempo tende a infinito.

O efeito Allee ocorre quando uma determinada espécie forma grupos para reduzir as limitações de acasalamento ou o risco de predação. A equação diferencial que descreve este fenômeno é:

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)\left(\frac{N-a}{k}\right), \tag{3}$$

r é a taxa de crescimento, $N(t)$ representando a população como função do tempo, a é o ponto crítico e k a capacidade de carregamento da população. Nestes casos, se o número de membros

[1]lydiane.souza@ufob.edu.br
[2]vitoria.r2150@ufob.edu.br

iniciais do grupo for pequeno, verifica-se que a população do grupo tende à extinção. Em contrapartida, se o número de indivíduos iniciais for mais significativo que o valor crítico a, tende a atingir um valor diferente de zero; isto é, a cooperação do grupo foi bem-sucedida.

Estudamos o comportamento da bifurcação no modelo de surto em populações, o modelo proposto por Ludwig em 1978. A equação descrita por este modelo é [3]:

$$\dot{N} = RN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - B\frac{N^2}{A^2 + N^2}, \tag{4}$$

com A, a constante que detemina o ponto de inflexão da predação, B, a constante de saturação da predação, R é a taxa de crescimento e $K > 0$ a capacidade de carregamento da população. Realizamos a adimensionalização da equação para reduzir o número de constantes da equação principal e verificamos que dependendo dos novos valores das constante $r = RA/B$ e $k = K/A$ haverá três possíveis tipos de soluções: a extinção, surto da espécie e a solução biestável.

Agradecimentos

Agradecemos à PROIC-UFOB pelo apoio valioso fornecido durante nosso projeto de pesquisa. Sua contribuição foi fundamental para o nosso progresso acadêmico.

Referências

[1] I. Cooper e Chris G. Antonopoulos. “A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities”. Em: **Chaos, Solitons & Fractals** 139 (2020), p. 110057. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110057`.

[2] C.J. Krebs. **Ecology: The Experimental Analysis of Distribution and Abundance**. 6a. ed. United States of America: Pearson Education Limited, 2014. ISBN: 978-1-292-02627-5.

[3] D. Ludwig, D. D. Jones e C. S. Holling. “Qualitative analysis of insect outbreak systems: The spruce budworm and forest”. Em: **Journal of Animal Ecology** 1 (1978), pp. 315–332. DOI: `https://doi.org/10.2307/3939`.

[4] S. Momani, R. Kumar, H.M. Srivastava, S. Kumar e S. Hadid. “A chaos study of fractional SIR epidemic model of childhood diseases”. Em: **Results in Physics** 27 (2021), p. 104422. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104422`.

[5] L. Petzold. “Automatic Selection of Methods for Solving Stiff and Nonstiff Systems of Ordinary Differential Equations”. Em: **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing** 1 (1983), pp. 36–148. DOI: `10.1137/0904010`.