Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Estrutura dos Arranjos Triangulares e Aplicações

Pedro H. S. Vital[1]
CCEN/UFPE, Recife, PE
Gabriel A. Guedes[2] Thiago Yukio Tanaka[3]
DM/UFRPE, Recife, PE

Neste trabalho, vamos apresentar uma definição para os arranjos triangulares que goza de diversas propriedades boas, como um isomorfismo com as sequências. Com esta construção, é possível desenvolver aplicações em análise e teoria dos números. Além disso, os arranjos triangulares foram explorados por vestibulares e olimpíadas de matemática [1]. De fato, as técnicas utilizadas na resolução destes problemas foram essenciais para a construção deste trabalho.

Em particular, vamos estudar a aplicação dos arranjos triangulares em progressões aritméticas de ordem superior. Neste contexto, defenderemos o uso de questões olímpicas em sala de aula para introduzir conceitos avançados de matemática, a nível de ensino médio.

Para começar, vamos propor a seguinte definição para os arranjos triangulares:

Definição 0.1. *Seja* $D = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; m \leq n\}$ *e* X *um conjunto. Um* ***arranjo triangular*** *é um mapa* $\mathcal{A} : D \to X$*. Um arranjo triangular é chamado de real quando* $X = \mathbb{R}$.

Resta mostrar que esta definição é razoável e apresenta propriedades interessantes. De um ponto de vista técnico, é possível mostrar que o espaço dos arranjos triangulares é isomorfo ao espaço das sequências, mas, intuitivamente, podemos interpretar os arranjos triangulares como uma sequência empilhada. Observe a imagem abaixo do arranjo $\mathcal{A}(n, m) = 2 + 3(\binom{n}{2} + m - 1)$.

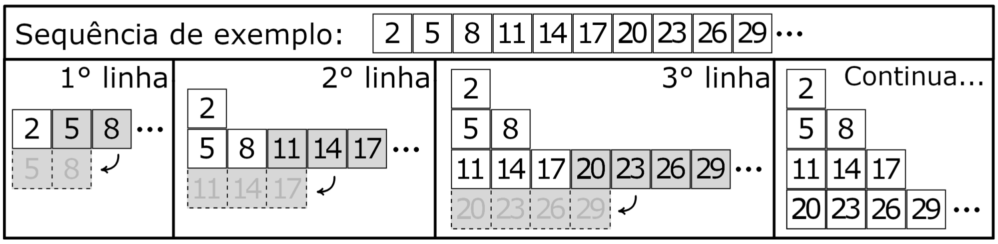

Figura 1: Exemplo de arranjo triangular.

A busca pelo isomorfismo supracitado foi motivada por uma questão da OBM. Este tipo de construção ajuda os estudantes a sistematizar o processo de relacionar dois objetos, além de apresentar uma aplicação acessível de funções bijetoras. Observemos, portanto, o problema olímpico.

(OBM, 2013, 1° Fase, Nível 3, [1]) O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1, dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha n possui exatamente n números. Veja as quatro primeiras linhas. Em qual linha aparecerá o 2013?

[1]pedrosalesvital@gmail.com
[2]gabriel.guedes@ufrpe.br
[3]thiago.tanaka@ufrpe.br

Tabela 1: Triângulo Aritmético de Fibonacci

Linha 1:	1			
Linha 2:	3	5		
Linha 3:	7	9	11	
Linha 4:	13	15	17	19
		...		

A fim de resolver a questão, é possível demonstrar em sala de aula a proposição abaixo.

Proposição 0.1. *A função* $\mathcal{F}(n,m) = \binom{n}{2} + m$ *é uma bijeção entre* D *e* $\mathbb{N}$*. Além disso,* $\mathcal{F}^{-1}(k) = (n,m)$ *onde*

$$n \in \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+8k}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+8k}}{2}\right) \quad e \quad m = k - \binom{n}{2}. \tag{1}$$

Essencialmente, esta proposição formaliza a ideia por trás da transformação de uma sequência numérica em arranjo triangular, ilustrada na Figura 1, e vice-versa. Mostrado isto, basta observar que o Triângulo Aritmético de Fibonacci pode ser escrito como $\mathcal{T}(n,m) = 2 \cdot \mathcal{F}(n,m) - 1$. Demonstrado este fato, os alunos e alunas podem ficar com o desafio de calcular $\mathcal{T}^{-1}(2013)$ por conta própria.

Observação 0.1. *Como os estudantes poderão observar, a demonstração da Proposição 0.1 envolve progressões aritméticas de ordem superior, um assunto pouco explorado no ensino médio. Assim, o estudo dos arranjos triangulares cria um ambiente propício para introduzir matemática discreta em sala de aula de forma sutil e natural.*

Dentre as propriedades dos arranjos triangulares, destaca-se sua relação com progressões aritméticas de ordem superior, onde as colunas formam uma PA de ordem $2p$. A demonstração disto usa apenas noções básicas de matemática discreta e indução, o que viabiliza a sua apresentação para os estudantes mais interessados.

Em turmas avançadas, seria possível expandir o escopo das PAs de ordem superior para introduzir as equações de diferenças. Observe o problema abaixo da Olimpíada Paraibana de Matemática.

(OPM, 2023, Nível 3, [2]) Observe a seguinte sequência: $(2, 6, 18, 54, 162, \ldots)$. Determine o quinto termo (da esquerda para a direita) da vigésima linha no arranjo triangular formada por ela.

Ao invés de uma PA de ordem superior, a sequência da questão é a equação de diferença $y(k+1) - y(k) = 4 \cdot 3^{k-1}$. A partir desta pequena diferença de enunciado, é possível ensinar métodos de solução para estas equações. Para responder ao problema, basta encontrar a solução $y(k) = 2 \cdot 3^{k-1}$ e calcular $y(\mathcal{F}(20,5))$.

Concluímos que os arranjos triangulares, através de problemas olímpicos, introduzem sutilmente conceitos avançados de análise e cálculo discreto, capacitando os estudantes para a universidade e satisfazendo a curiosidade sobre aplicações dos temas do ensino médio.

Referências

[1] OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática. **OBM 2013, Fase 1, Nível 3**. Online. Acessado em 06/03/2024, `https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/1fase_nivel3_2013.pdf`.

[2] OPM - Olimpíada Paraibana de Matemática. **OPM 2023, Nível 3**. Online. Acessado em 25/06/2024, `http://www.mat.ufpb.br/opm/attachments/article/10/ProvaNivel3-2023.pdf`.