Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Uma Tentativa de Melhorar a Simetria no Pós-processamento do Campo de Tensões

Giovanni Taraschi[1] Maicon R. Correa[2]
IMECC/Unicamp, Campinas, SP

No contexto do problema da elasticidade linear, as duas variáveis de interesse são o deslocamento do corpo elástico e o tensor de tensões [1]. Alguns métodos numéricos para resolver tal problema, como os métodos de Elementos Finitos mistos [1, 4], são capazes de aproximar simultaneamente os campos deslocamento e tensão. Outras estratégias, no entanto, aproximam apenas o deslocamento, e o campo de tensões precisa ser computado posteriormente através de uma estratégia de pós-processamento [3]. Definimos por $H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$ o espaço dos tensores de segunda ordem em Ω cujas entradas e divergente (tomado linha a linha) são quadraticamente integráveis, e por $H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{S}) \subset H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$ o subespaço dos tensores $H(\mathrm{div})$-conformes e simétricos. É desejado que a tensão aproximada pertença a $H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{S})$, de forma a garantir boas propriedades de conservação para os momentos linear e angular.

Em [5], os autores analisam a estratégia de pós-processamento global proposta em [3] para a aproximação da tensão em problemas de elasticidade linear. Dado $\boldsymbol{u}_h$ uma aproximação previamente calculada para o deslocamento e $\mathcal{S}_h \subset H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$ um subespaço de dimensão finita, tal estratégia consiste em encontrar $\boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h$ tal que

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) : \boldsymbol{\tau} \,\mathrm{dx} + \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{div}(\boldsymbol{\tau}) \,\mathrm{dx}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_h, \tag{1}$$

onde $\boldsymbol{f}$ é uma função vetorial que representa a força distribuída aplicada sobre o corpo elástico, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h)$ denota a parte simétrica do gradiente de $\boldsymbol{u}_h$ e a forma bilinear $a(\cdot,\cdot) : H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M}) \times H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M}) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\tau} \,\mathrm{dx} + \int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau} \,\mathrm{dx}, \tag{2}$$

com $\boldsymbol{A}$ sendo o tensor de complacência.

A análise desenvolvida em [5] mostra que a estratégia (1) é robusta ao *locking* [2], sendo apropriada para a aproximação de problemas quase-incompressíveis. Neste mesmo artigo, os autores apresentam possíveis escolhas para o espaço $\mathcal{S}_h$ que garantem taxas de convergência ótimas para a aproximação da tensão na norma de $H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$. Tais espaços estão definidos para malhas compostas por elementos triangulares ou quadrilaterais e são construídos através da transformação de Piola. Toda via, os elementos destes espaços não são simétricos, de forma que a simetria da tensão aproximada $\boldsymbol{\sigma}_h$ é satisfeita apenas fracamente.

Em uma tentativa de melhorar a simetria da tensão aproximada, propomos neste trabalho uma modificação na estratégia (1). A modificação consiste em substituir a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ por

$$\tilde{a}(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) = a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{h} \int_\Omega \mathrm{asym}(\boldsymbol{\sigma}_h) : \mathrm{asym}(\boldsymbol{\tau}) \,\mathrm{dx}, \tag{3}$$

[1] gitaraschi@gmail.com
[2] maicon@ime.unicamp.br

onde $\mathrm{asym}(\boldsymbol{\tau})$ é a parte anti-simétrica de $\boldsymbol{\tau}$ e h é o diâmetro da malha usada no cálculo de $\boldsymbol{u}_h$. Note que o último termo em (3) pode ser visto como uma penalização para a parte anti-simétrica de $\boldsymbol{\sigma}_h$. Mais ainda, a adição deste termo não afeta a consistência da estratégia, umas vez que

$$\tilde{a}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) = a(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) : \boldsymbol{\tau} \,\mathrm{dx}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_h. \tag{4}$$

Infelizmente, a forma bilinear modificada (3) nem sempre é suficiente para melhorar a simetria da tensão aproximada. Experimentos numéricos realizados neste trabalho mostram que, para certos espaços $\mathcal{S}_h$, o erro de simetria

$$\mathrm{errsym}(\boldsymbol{\sigma}_h) = \frac{\|\mathrm{assym}(\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{0,\Omega}}{\|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,\Omega}} \tag{5}$$

da tensão aproximada é praticamente o mesmo para as estratégias original e modificada. No entanto, para espaços de aproximação $\mathcal{S}_h$ suficientemente ricos, nossos resultados numéricos indicam que a forma modificada não só melhora a simetria da tensão aproximada mas também a sua convergência em $H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$. Em nossos testes, o aumento na taxa de convergência pode chegar a meio na norma de $H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$ e a um para o erro de simetria (5). Em particular, para o caso de problemas com condição de contorno homogênea de Dirichlet, o aumento na taxa de convergência em $H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$ também chega a um.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (processos 140400/2021-4 e 304192/2019-8) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (processo 2013/07375-0) pelo apoio financeiro recebido para a realização deste trabalho.

Referências

[1] D. N. Arnold. "Mixed finite element methods for elliptic problems". Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 82.1 (1990), pp. 281–300. DOI: `https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90168-L`.

[2] I. Babuška e M. Suri. "Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems". Em: **Numerische Mathematik** 62.1 (1992), pp. 439–463. DOI: `https://doi.org/10.1007/BF01396238`.

[3] A. F. D. Loula, F. A. Rochinha e M. A. Murad. "Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems". Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 128.3 (1995), pp. 361–381. DOI: `https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00885-3`.

[4] T. O. Quinelato, A. F. D. Loula, M. R. Correa e T. Arbogast. "Full H(div)-approximation of linear elasticity on quadrilateral meshes based on ABF finite elements". Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 347 (2019), pp. 120–142. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.12.013`.

[5] G. Taraschi, M. R. Correa, A. S. Pinto e C. O. Faria. "A global H(div)-conforming finite element post-processing for stress recovery in nearly incompressible elasticity". Em: **Applied Mathematics and Computation** 470 (2024), p. 128587. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128587`.

