Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Formalismo de Dubovickij-Miljutin Não-Suave

Pedro O. de S. Mussatto[1], Geraldo N. Silva[2]

Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, SP

Em estudos de otimização em dimensão infinita, modelos são analisados com o objetivo de minimizar um funcional real em um subconjunto de um espaço de Banach real, um tipo específico de espaço vetorial. Em alguns cenários, o conjunto de busca das soluções não abrange todo o espaço, refletindo melhor os desafios reais. Isto leva aos chamados **problemas com restrições**.

Um exemplo notável é o **problema de tempo mínimo de interceptação**, que surgiu com o advento da Guerra Fria. Tal desafio, de acordo com Pesch e Plail [5], instigou os matemáticos a encontrar a trajetória ótima para guiar um avião de uma posição inicial até uma posição mais favorável para atacar aviões inimigos. Nesse contexto, Pontrjagin, Boltjanskij e Gamkrelidze [6] foram os primeiros a estabelecer condições necessárias gerais de otimalidade e que, no caso de problemas lineares, funcionam, também, como condições suficientes. Essas condições, conhecidas, coletivamente, como **Princípio do Máximo**, são vistas como marco fundamental na emergência da Teoria de Controle Ótimo como campo de pesquisa independente por Vinter [7].

No entanto, a introdução dessas condições significou a quebra da unidade de condições de otimalidade gerais, pois diferiam, significativamente, das condições obtidas no Cálculo das Variações [4]. Essa unidade, porém, foi restaurada por Dubovickij e Miljutin [3], que formularam uma condição de otimalidade para problemas gerais de otimização em espaços de Banach. Essa condição engloba tanto as condições de Euler e Lagrange como o Princípio do Máximo, e sua demonstração é realizada através da aproximação do conjunto viável por cones de direções viáveis e tangentes e do subnível ótimo do funcional objetivo por um cone de direções de descida. O fato de o extremal analisado ser minimizador implica que tais cones são separáveis — essa propriedade é denominada **Princípio da Interseção** conforme definido por Watkins [8]. A partir desse ponto, é possível encontrar funcionais não-nulos em seus respectivos cones polares cuja somatória é nula. Entretanto, Watkins [8] menciona que a principal desvantagem dessa abordagem é a necessidade de quase todos os cones (especificamente, os de direções de descida e viáveis) serem abertos. Watkins [8] apresenta uma solução mostrando que o cone tangente introduzido por Clarke [1] satisfaz o Princípio da Interseção, mas seu raciocínio utiliza conceitos de ângulo e compacidade da bola unitária, o que o faz aplicável, possivelmente, apenas a problemas em espaços de Hilbert.

Diante disso, o foco principal deste trabalho é apresentar uma versão não-suave do formalismo de Dubovickij-Miljutin para problemas em espaços de Banach gerais utilizando esse cone tangente. Até onde sabemos, o resultado apresentado é original. São introduzidos os cones principais a serem trabalhados (tangente, hipertangente e normal) utilizando o trabalho de Clarke [2] como base, e enunciadas as principais propriedades utilizadas. A partir delas, enuncia-se o resultado principal. Aqui, são usadas as notações $\mathfrak{t}(Q; x_0)$, $\mathfrak{h}(Q; x_0)$ e $\mathfrak{n}(Q; x_0)$ para denotar o cone tangente, o hipertangente e o normal a um conjunto Q em um ponto x_0.

[1]pedro.os.mussatto@unesp.br

[2]geraldo.silva@unesp.br

Teorema. *Dados conjuntos* $C_1, \dots, C_n \subseteq X$, $x_0 \in C := \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ *e um funcional* $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ *que seja, direcionalmente, lipschitziano em* x_0, *suponha que* C_i, *para cada* $i \in \{1 : n\}$, *admita, pelo menos, uma direção hipertangente em* x_0 *e*

$$\mathfrak{t}\left(f^{-1}([-\infty, f(x_0)]); x_0\right) \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{h}(C_i; x_0)\right] \neq \emptyset.$$

Nessas condições, se x_0 *minimiza* f *em* C *local e estritamente, então, existem* $y_0, \dots, y_n$ *não todos nulos cuja somatória é nula e de modo que* $y_0 \in \mathfrak{n}\left(f^{-1}([-\infty, f(x_0)]); x_0\right)$ *e* $y_i \in \mathfrak{n}(Q_i; x_0)$ *para todo* $i \in \{1 : n\}$.

Agradecimentos

Os autores agradecem tanto ao Centro Nacional de Desenvolvimento Tecnológico (CNPq), que, por meio do processo nº 165080/2021-3, concedeu bolsa de Mestrado ao apresentador para realização de seus estudos quanto à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) por financiar, por meio do processo nº 2013/07375-0, a aplicação de conhecimento matemático a outras áreas da ciência, tecnologia e indústria. As opiniões, hipóteses e recomendações/conclusões, aqui, apresentadas são de responsabilidade dos autores e não refletem, necessariamente, a visão da FAPESP.

Referências

[1] F. H. Clarke. "Generalized Gradients and Applications". Em: **Transactions of the Americal Mathematical Society** 205 (1975), pp. 247–262. ISSN: 0002-9947.

[2] F. H. Clarke. **Optimization and Nonsmooth Analysis**. Classics in Applied Mathematics 5. Filadélfia: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1990. xii+308. ISBN: 0-89871-256-4.

[3] A. Ja. Dubovickij e A. A. Miljutin. "Extremum problems with certain constraints". Em: **Proceedings of the USSR Academy of Sciences** 149 (1963), pp. 759–762. ISSN: 0002-3264.

[4] I. V. Girsanov. **Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems**. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 67. Berlim: Springer Science & Business Media, 1972. ii+136. ISBN: 3-540-05857-5.

[5] H. J. Pesch e M. Plail. "The Cold War and the Maximum Principle of Optimal Control". Em: **Documenta Mathēmatica** 17 (2012), pp. 331–343. ISSN: 1431-0635.

[6] L. S. Pontrjagin, V. G. Boltjanskij e R. V. Gamkrelidze. "Theory of optimal processes. I. The maximum principle". Em: **Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mathematical Series** 24 (1960), pp. 3–42. ISSN: 1064-5632.

[7] R. Vinter. **Optimal Control**. Modern Birkhäuser Classics. Boston: Springer Science & Business Media, 2010. xx+507. ISBN: 0-8176-8086-1.

[8] G. G. Watkins. "Nonsmooth Miljutin-Dubovickij Theory and Clarke's Tangent Cone". Em: **Mathematics of Operations Research** 11 (1986), pp. 70–80. ISSN: 0364-765X.