Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Soluções de Navier-Stokes a partir de Métodos Numéricos para Escoamentos Livres

Júlia M. M. M. Vieira[1]
CTEC/UFAL, Maceió, AL
Matheus F. de M. Silva[2] Isnaldo I. Barbosa[3]
IM/UFAL, Maceió, AL

As equações de Navier-Stokes (1) são um conjunto de equações diferenciais parciais (EDP) que descrevem o movimento de fluidos. Elas são essenciais para a compreensão e modelagem do comportamento de líquidos e gases, podendo prever seus movimentos em uma variedade de cenários, como o fluxo de ar ao redor de um avião, o movimento de fluidos em dutos, a circulação atmosférica e a dinâmica dos oceanos [3].

As Equações são representadas por:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} - \vec{\Delta} p + \rho \vec{g}, \tag{1}$$

onde, $\vec{V}$ é a velocidade do fluido, que pode variar em relação ao espaço e ao tempo; p é a pressão; ρ é a densidade do fluido; g é a aceleração da gravidade; e t é o tempo.

Diante da complexidade das equações diferenciais parciais, muitos problemas de Fenômenos de Transporte não podem ser resolvidos analiticamente e, em alguns casos, nem mesmo através de métodos numéricos [6]. Baseado nisso, é importante e necessário estabelecer condições ao problema, de modo que as equações de Navier-Stokes possam ser simplificadas.

Nesse sentido, o escoamento livre, caracterizado pelo contato de sua superfície com a atmosfera [1], apresenta desafios significativos devido a fatores como a variabilidade temporal e o atrito nas paredes do canal. Assim, considerando uma declividade muito pequena, de modo que se possam desprezar os efeitos da aceleração da gravidade no sentido do escoamento, é possível afirmar que a velocidade não variará ao longo do tempo. Além disso, nessa condição, garante-se também que a pressão ocorra em um regime hidrostático, dependendo apenas da profundidade [1]. Sabendo que a velocidade no sentido transversal e vertical é nula, pode-se simplificar a equação de Navier-Stokes da seguinte forma:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{2}$$

em que u é a componente em x da velocidade e varia em relação as três coordenadas do espaço, em consequência das forças de atrito dos lados e no fundo do canal.

Uma representação do perfil de velocidade de um escoamento livre pode ser visualizado na Figura 1 abaixo.

[1]julia.vieira@ctec.ufal.br
[2]matheus.melo@im.ufal.br
[3]isnaldo@pos.mat.ufal.br

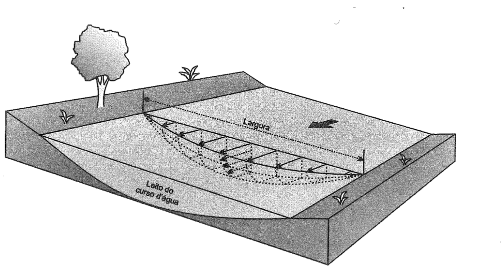

Figura 1: Perfil de velocidade em escoamento livre. Fonte: [1] Baptista, 2010.

Este trabalho tem como objetivo construir soluções para a equação (2) por meio de métodos computacionais que possibilitem o controle do erro, o qual, como pode ser visto no capítulo 11.4 do livro Análise Numérica [4], é de ordem $O(h^2)$ para o método das diferenças finitas, permitindo caracterizar a variação da velocidade de um escoamento livre de propriedades pré-determinadas, como vazão, largura e área do canal.

A metodologia empregada nesta pesquisa consistiu, inicialmente, no estudo de bibliografia voltada à modelagem, através do livro Modelagem Matemática [2], seguido de revisão da literatura especializada em Fenômenos de Transporte e Hidráulica que tratam, mais especificamente, de escoamentos livres e equações de Navier-Stokes. Essa abordagem possibilitou a modelagem do problema proposto.

Após definir valores para a viscosidade e a massa específica do líquido, a equação (2) será solucionada através da técnica de diferenças finitas, método consolidado para este tipo de problema [5], por meio da linguagem de programação Python.

Referências

[1] M. Baptista e M. Lara. **Fundamentos de Engenharia Hidráulica**. 3a. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2010. ISBN: 978-85-7041-828-9.

[2] R. C. Bassanezi. **Modelagem Matemática**. 2002.

[3] R. B. Bird, W. E. Stewart e E. N. Lightfoot. **Fenômenos de Transporte**. 3a. ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2004.

[4] L. R. Burden, D. J. Faires e A. M. Burden. **Análise Numérica**. 10a. ed. Cengage, 2015.

[5] J. A. Cuminato e M. M. Junior. **Discretização e de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas**. 10a. ed. SBM, 2018.

[6] M. C. Potter, D. C. Wiggert e D. C. Ramadan. **Mecânica dos Fluidos**. 4a. ed. Cengage, 2015. ISBN: 9788522115686.

