

O Teorema da Amizade e o Jogo *Dobble* em uma Introdução à Ideia de Plano Projetivo Finito

Milena A. R. Maciel¹, Beatriz Motta²
 UFJF, Juiz de Fora, MG

Imagine que está acontecendo uma festa na qual nem todo mundo se conhece, mas todo par de pessoas sempre tem exatamente um amigo em comum. Você acha que ali existe alguém que conhece todos os participantes da festa? A resposta é sim! Na teoria de grafos existe um teorema famoso, conhecido como Teorema da Amizade que, em sua versão ingênua, diz exatamente isso. Sua versão formal é:

Teorema 1 (Teorema da Amizade). *Seja G_n um grafo com n vértices no qual quaisquer dois pontos são conectados por um caminho de comprimento 2 e que não contém nenhum ciclo de comprimento 4, então $n = 2k + 1$ e G_n consiste em k triângulos que têm um vértice em comum.*

Assim, uma festa do tipo dado no enunciado do Teorema da Amizade pode ser representada por um grafo do tipo moinho.

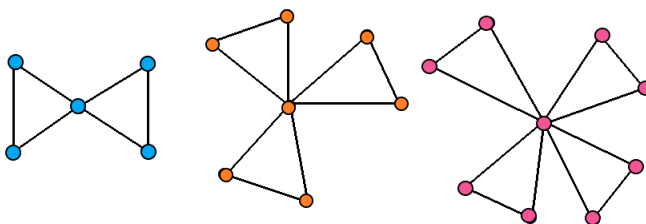


Figura 1: Grafos do Teorema da Amizade com $n = 5$, $n = 7$ e $n = 9$. Fonte: Elaborada pela autora.

A maioria dos autores reconhece que a primeira prova publicada foi dada por Erdős, Rényi e Sós em 1966, embora apenas como um teorema sem nome. Desde então, muitas provas diferentes foram dadas por outros autores.

Nesse trabalho, propomos que a versão ingênua do Teorema da Amizade seja utilizada como motivação para o estudo de um conceito bastante abstrato, o de plano projetivo finito, que esperamos introduzir nesse trabalho de forma concreta utilizando o jogo *Dobble*. Esse é o ingrediente principal de uma das demonstrações do Teorema da Amizade, conforme [1].

Dobble (ou *Spot It*), em sua versão original, é um jogo que contém 57 símbolos distintos distribuídos em 55 cartas, cada uma com 8 símbolos, de maneira que quaisquer duas cartas sempre têm exatamente um símbolo em comum. O jogo oferece 5 maneiras distintas de ser jogado, mas todas se resumem em ser o mais rápido a encontrar qual o símbolo em comum entre um par de cartas. O jogo surgiu através de um problema que foi proposto em 1850 pelo reverendo Thomas Penyngton

¹milena.arantes@ice.ufjf.br

²beatriz@ice.ufjf.br

Kirkman em uma revista anual de matemática recreativa chamada *The Lady's and Gentleman's Diary*, que dizia “Quinze moças em uma escola saem três lado a lado por sete dias consecutivos: é necessário organizá-las diariamente de modo que duas não caminhem duas vezes lado a lado.”

Para apresentar o conceito de plano projetivo finito, vamos considerar um *Dobble* simplificado com 7 cartas, onde cada carta contém 3 personagens distintos de “Star Wars” e, no total, temos 7 personagens diferentes. A ideia é explorar o funcionamento do jogo, inicialmente sem falar sobre a matemática envolvida. Em seguida, vamos organizar as cartas segundo suas “retas” e “pontos”, conforme a figura 2 de forma a mostrar visualmente o que queremos chamar de plano projetivo finito. Essa noção será, então, generalizada, conforme [1].

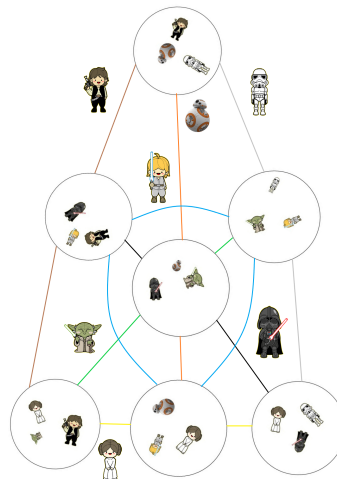


Figura 2: *Dobble* de Fano (ordem 2). Fonte: Elaborada pela autora.

Por fim, a ideia do plano projetivo finito será usada para apresentar a demonstração do Teorema da Amizade para alguns casos específicos, como em uma festa com 5 pessoas, a partir da construção de um plano projetivo finito que se mostrará impossível quando assumimos que a conclusão do teorema é falsa. Acreditamos que essa atividade é uma excelente forma de introduzir conceitos abstratos em ambiente escolar como forma de divulgação científica e exercício do raciocínio matemático.

Referências

- [1] M. A. R. Maciel. **Planos projetivos finitos e aplicações em jogos, grafos, designs e códigos**. Trabalho de Conclusão de Curso. https://shortlurl.com/TCC_Milena.