Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Refinamento Assintótico em Modelos de Regressão Log-Birnbaum-Saunders sob Censura tipo II

Thalytta E. C. Silva[1] Audrey H. M. A. Cysneiros[2] Aline B. Tsuyuguchi[3]
Departamento de Estatística/UFPE, Recife, PE

A distribuição derivada por [3], conhecida como distribuição Birnbaum-Saunders (`BS`) é um modelo probabilístico que vem ganhando destaque além de se adequar bem à região central e ajustar melhor os percentis mais baixos e altos. Algumas generalizações e extensões da distribuição `BS` têm sido propostas nos últimos anos, como, por exemplo, o modelo de regressão log-`BS` desenvolvido por [7] que tem se mostrado muito apropriado para modelar problemas de tempo de vida que consideram a transformação logarítmica de uma variável resposta que segue uma distribuição `BS`.

Muitas vezes, queremos executar inferências em um certo modelo envolvendo apenas uma parte dos parâmetros. Desta forma, chamaremos os parâmetros sobre os quais a inferência será realizada de parâmetros de interesse (α, parâmetro de forma da distribuição `BS`) e os demais de parâmetros de perturbação ($\boldsymbol{\gamma}$, vetor com os coeficientes de regressão). Em situações como esta, é possível construir uma função que dependa somente dos parâmetros de interesse e que possibilite realizar inferências sobre esses parâmetros. A função decorrente é chamada de função de verossimilhança perfilada (`f.v.p.`). A ideia consiste em substituir na função de verossimilhança (`f.v.`) original os parâmetros de perturbação por seus respectivos estimadores de máxima verossimilhança (`E.M.V.`), ver [9]. Lamentavelmente, a `f.v.p.` não usufrui de todas as propriedades de uma `f.v.` original, em geral, o escore perfilado não apresenta média zero e como consequência a informação de Fisher apresenta viés. Diante disso, diversos pesquisadores propuseram ajustes para a `f.v.p.` com a finalidade de reduzir os problemas acarretados por esta função, dentre eles: [1], [4], [8] e [6]. Os autores [5] e [2] utilizaram essas técnicas de refinamentos na distribuição `BS`. Neste sentido, apresentaremos ajustes para a `f.v.p.` em modelos de regressão log-`BS` com observações completas e censuradas.

O ajuste proposto por [8] para a função de log-verossimilhança perfilada (`f.lv.p.`) é dado por

$$\breve{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2}\log|j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)| - \log|\breve{I}_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha;\widehat{\alpha},\widehat{\boldsymbol{\gamma}})|,$$

em que $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha$ é o `E.M.V.` restrito para $\boldsymbol{\gamma}$, $\ell_p(\alpha)$ é a `f.lv.p` para α, $j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ é a matriz de informação observada para $\boldsymbol{\gamma}$ avaliada em $(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ e $\breve{I}_{\boldsymbol{\gamma}}(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha;\widehat{\alpha},\widehat{\boldsymbol{\gamma}})$ é uma matriz com elemento (s,t) dado por $\sum_{i=1}^{n}\delta_i\, U_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s,i)}(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)U_{\boldsymbol{\gamma}}^{(t,i)}(\widehat{\alpha},\widehat{\boldsymbol{\gamma}})^\top + \sum_{i=1}^{n}(1-\delta_i)\, U_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s,i)}(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)\, U_{\boldsymbol{\gamma}}^{(t,i)}(\widehat{\alpha},\widehat{\boldsymbol{\gamma}})^\top$, sendo $U_{\boldsymbol{\gamma}}^{(s,i)}$ o s-ésimo componente do vetor escore de $\boldsymbol{\gamma}$ baseado na i-ésima observação e avaliado em $(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ e $(\widehat{\alpha},\widehat{\boldsymbol{\gamma}})$, respectivamente, sendo este último os `E.M.V.` original. As matrizes possuem dimensão $p\times p$. O `E.M.V.` perfilado ajustado correspondente é denotado por $\widehat{\breve{\alpha}}_{BN}$.

Uma outro ajuste, foi apresentado por [6]. O correspondente ajuste é dado por

$$\tilde{\ell}_{BN}(\alpha) = \ell_p(\alpha) + \frac{1}{2}\log|j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)| - \log|\ell_{\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{y}}(\alpha,\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)\widehat{V}_{\boldsymbol{\gamma}}|,$$

[1] thalytta.cavalcante@ufpe.br
[2] audrey.cysneiros@ufpe.br
[3] aline.tsuyuguchi@ufpe.br

em que $\ell_{\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{y}}(\alpha, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ é obtida derivando os componentes do vetor escore de $\boldsymbol{\gamma}$ com relação ao vetor de observações $\boldsymbol{y}$ e $\widehat{V}_{\boldsymbol{\gamma}} = \left[\widehat{V}_{\gamma_1}\widehat{V}_{\gamma_2}\dots\widehat{V}_{\gamma_p}\right]$, com $\widehat{V}_{\gamma_s} = \left(-\frac{\left(\frac{\partial F(y_1;\widehat{\alpha},\widehat{\boldsymbol{\gamma}})}{\partial\widehat{\gamma}_s}\right)}{f(y_1;\widehat{\alpha},\widehat{\boldsymbol{\gamma}})}, \dots, -\frac{\left(\frac{\partial F(y_n;\widehat{\alpha},\widehat{\boldsymbol{\gamma}})}{\partial\widehat{\gamma}_s}\right)}{f(y_n;\widehat{\alpha},\widehat{\boldsymbol{\gamma}})}\right)^\top$, $s = 1, \dots, p$, sendo $F(\cdot)$ a `f.d.a.` e $f(\cdot)$ a `f.d.p.` da `v.a.` Y_i, $i = 1, \dots, n$. A matriz $\ell_{\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{y}}(\alpha, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)$ tem dimensão $p \times n$ com elemento (s, i) e $\widehat{V}_{\boldsymbol{\gamma}}$ tem dimensão $n \times p$. O `E.M.V.` perfilado ajustado correspondente é $\widehat{\widehat{\alpha}}_{BN}$.

Por fim, o ajuste de [4]. A `f.lv.p` ajustada é dada por

$$\ell_{CR}(\alpha) = \ell_p(\alpha) - \frac{1}{2}\log|\, j_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}}(\alpha, \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha)\,|.$$

O `E.M.V.` perfilado ajustado correspondente é representado por $\widehat{\alpha}_{CR}$.

Os resultados das simulações de Monte Carlo (omitidos aqui devido à limitação de espaço) sugerem que os estimadores e testes baseados nas `f.v.p.` ajustadas supera os resultados baseados na `f.v.p.`, tanto na estimação, por apresentarem menores vieses, quanto nos testes, por apresentarem taxas de rejeição mais próximas aos níveis nominais. Além disso, aplicamos a teoria estudada a dados reais.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio financeiro fornecido pela FACEPE e CNPq.

Referências

[1] O. Barndorff-Nielsen. “On a formula for the distribution of the maximum likelihood estimator”. Em: **Biometrika** 2 (1983), pp. 343–365. DOI: 10.1093/biomet/70.2.343.

[2] L. S. Barreto, A. H. M. A. Cysneiros e F. Cribari-Neto. “Improved Birnbaum–Saunders inference under type II censoring”. Em: **Computational Statistics & Data Analysis** 1 (2013), pp. 68–81. DOI: 10.1016/j.csda.2012.06.005.

[3] Z. W. Birnbaum e S. C. Saunders. “A New Family of Life Distributions”. Em: **Journal of applied probability** 2 (1969), pp. 319–327. DOI: 10.2307/3212003.

[4] D. R. Cox e N. Reid. “Parameter Orthogonality and Approximate Conditional Inference”. Em: **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)** 1 (1987), pp. 1–18. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1987.tb01422.x.

[5] A. H. M. A. Cysneiros, F. Cribari-Neto e C. A. G. Araújo Jr. “On Birnbaum–Saunders inference”. Em: **Computational Statistics & Data Analysis** 11 (2008), pp. 4939–4950. DOI: 10.1016/j.csda.2008.04.003.

[6] D. A. S. Fraser e N. Reid. “Ancillary information for statistical inference”. Em: **Empirical Bayes and Likelihood Inference**. Ed. por Ahmed S. E. e Reid N. Vol. 148. Springer, 2001. Cap. 12, pp. 185–209. DOI: 10.1007/978-1-4613-0141-7_12.

[7] J. R. Rieck e J. R. Nedelman. “A Log-linear Model for the Birnbaum-Saunders Distribution”. Em: **Technometrics** 1 (1991), pp. 51–60. DOI: 10.1080/00401706.1991.10484769.

[8] T. A. Severini. “An empirical adjustment to the likelihood ratio statistic”. Em: **Biometrika** 2 (1999), pp. 235–247. DOI: 10.1093/biomet/86.2.235.

[9] T. A. Severini. **Likelihood Methods in Statistics**. 1a. ed. Reino Unido: Oxford University Press, 2001. ISBN: 9780198506508.