

Exemplos de Códigos Corretores de Erros a Partir de Planos Projetivos Finitos

Milena A. R. Maciel¹, Beatriz Motta²
UFJF, Juiz de Fora, MG

Neste trabalho, queremos estudar os códigos corretores de erros obtidos dos planos projetivos finitos de menor ordem: os planos de Fano e jogo da velha, como feito nas Seções 3 e 4 do Capítulo 6 de [3].

O plano de Fano é formado por 7 pontos e 7 retas, sendo cada reta com 3 pontos e cada ponto em 3 retas. Sua representação mais conhecida é a da figura 1a. Nessa representação, a linha circular é uma reta, que parece intersectar outras retas 2 vezes, mas as interseções sem pontos marcados na verdade não são interseções. Isso ocorre pois estamos desenhando o plano de Fano no plano Euclidiano.

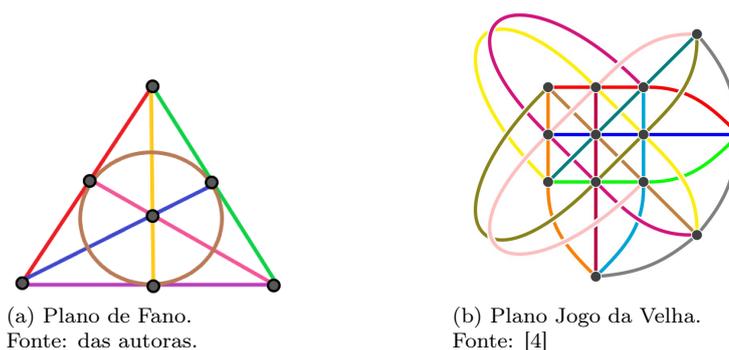


Figura 1: Os planos projetivos finitos de menores ordens.

O plano jogo da velha (figura 1b) é formado por 13 pontos e 13 retas, sendo que cada reta contém 4 pontos e cada ponto pertence a 4 retas.

Um plano projetivo finito é um conjunto finito cujos elementos são chamados pontos e alguns de seus subconjuntos são chamados retas e que satisfaz as seguintes propriedades: (i) duas retas distintas se encontram precisamente em um único ponto; (ii) dois pontos distintos definem uma única reta; (iii) existem pelo menos 4 pontos dos quais não há 3 em uma mesma reta.

Toda reta em um plano projetivo finito tem o mesmo número de pontos, e aquele que contém $n + 1$ pontos sobre cada reta é dito plano projetivo de ordem n . Até o momento, só são conhecidos planos projetivos de ordem n , sendo n um número primo ou potência de primo. Para os números compostos não se tem um resultado geral sobre existência ou inexistência de planos projetivos, apenas sobre casos particulares. Assim, os planos de Fano e jogo da velha são os de menores ordens possíveis, que são 2 e 3 respectivamente. Por fim, podemos provar que todo plano projetivo

¹milena.arantes@ice.ufjf.br

²beatriz@ice.ufjf.br

de ordem n contém exatamente $n^2 + n + 1$ pontos e $n^2 + n + 1$ retas. Mais informações sobre as propriedades básicas dos planos projetivos finitos podem ser encontradas no Capítulo 14 de [2].

Uma aplicação simples e útil da noção de planos projetivos finitos é construir exemplos de códigos corretores de erros, como veremos nesse trabalho.

Em essência, um código corretor de erros é um modo organizado de acrescentar um dado adicional a cada informação que se queira transmitir ou armazenar, que permita detectar e corrigir erros na decodificação. Um exemplo de código muito utilizado é o de números com dígitos verificadores, como é o caso de números de contas bancárias e de CPF.

Aqui estamos interessados em códigos lineares como definidos, por exemplo, em [1]. Um código linear \mathcal{C} é um subespaço vetorial de \mathbb{F}_q^n sobre \mathbb{F}_q , onde \mathbb{F}_q é o corpo finito com $q = p^n$ elementos para quaisquer p primo e n inteiro positivo. A dimensão k do código é a dimensão de \mathcal{C} sobre \mathbb{F}_q como espaço vetorial.

Dados dois elementos $u, v \in \mathbb{F}_q^n$, podemos definir uma distância, chamada distância de Hamming, como o número de coordenadas distintas entre u e v , ou seja,

$$d(u, v) = |\{i; u_i \neq v_i, 1 \leq i \leq n\}|.$$

A distância mínima d de um código $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_q^n$ é o mínimo das distâncias de Hamming, assim, \mathcal{C} pode corrigir até $\kappa = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ erros e detectar até $d-1$ erros. Um código nessas condições tem parâmetros $[n, k, d]_q$.

Nosso objetivo, dadas essas definições, é compreender como os planos de Fano e jogo da velha fornecem códigos com parâmetros $[7, 4, 3]_2$ e $[13, 10, 3]_3$, respectivamente.

Referências

- [1] S. Ball. **A Course in Algebraic Error-Correcting Codes**. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser Cham, 2020. ISBN: 978-3-030-41153-4.
- [2] L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztegombi. **Discrete Mathematics: Elementary and Beyond**. Undergraduate Texts In Mathematics. New York: Springer, 2003. ISBN: 9780387955858.
- [3] M. A. R. Maciel. **Planos projetivos finitos e aplicações em jogos, grafos, designs e códigos**. Trabalho de Conclusão de Curso. https://shortlurl.com/TCC_Milena.
- [4] K. Wessen. **The Mathenæum: Mathematical explorations, games, and learning**. Online. Acessado em 08/11/2024. <http://thewessens.net/ClassroomApps/Main/finitegeometry.html>.