Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Estudo Sobre o Índice de Matrizes Hermitianas Associadas a Grafos Unicíclicos

Bruno Scaratti[1], Rodrigo O. Braga[2]
UFRGS, Porto Alegre, RS

Na teoria espectral de grafos procura-se estudar propriedades estruturais de grafos a partir de matrizes e seus autovalores. Dado um grafo G com n vértices, denotamos por $V(G)$ e $E(G)$ o conjunto de vértices e arestas de G, respectivamente. A matriz de adjacência $A(G)$ de G é definida como a matriz quadrada de ordem n tal que sua entrada ij é 1 se o vértice v_i for adjacente ao vértice v_j, e 0 caso contrário. Por se tratar de uma matriz simétrica, todos seus autovalores são números reais e serão denotados por $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq ... \geq \lambda_n(G)$. O multiconjunto (incluindo multiplicidades) dos autovalores de $A(G)$ é chamado de espectro de G e será denotado $\sigma(G)$. Em especial, o maior autovalor $\lambda_1(G)$ é chamado de índice de G e é um parâmetro bastante estudado (veja [2], por exemplo). O raio espectral de G é definido como $\rho(G) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(G)\}$. Como $A(G)$ é uma matriz com entradas não negativas, pelo Teorema de Perron-Frobenius, podemos garantir que $\rho(G) = \lambda_1(G)$ [3], contudo, tal propriedade não é necessariamente verdadeira para diferentes matrizes associadas ao mesmo grafo G.

Neste trabalho iremos considerar uma classe de matrizes que pode ser associada a um grafo G, que inclui, entre as quais, a matriz $A(G)$. Observamos que qualquer matriz quadrada $M = (m_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ pode ser associada a G com a propriedade que dois vértices distintos v_i e v_j são adjacentes se e somente se $M_{ij} \neq 0$. O número M_{ij} será chamado de peso da aresta e_{ij}.

Definiremos a classe de matrizes associadas a G sobre o corpo dos complexos e denotaremos $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ o círculo unitário no plano complexo. O conjunto das arestas direcionadas de um grafo G, denotado $\overrightarrow{E(G)}$, é o conjunto onde para toda aresta $e_{ij} \in E(G)$ há dois elementos, $\overrightarrow{e_{ij}}$ e $\overrightarrow{e_{ji}}$, indicando as duas orientações de uma mesma aresta de G. Note que podemos definir pesos diferentes para cada direção da aresta. Dado um grafo G e uma função $\gamma : \overrightarrow{E(G)} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\gamma(\overrightarrow{e_{ij}}) = \overline{\gamma(\overrightarrow{e_{ji}})} \tag{1}$$

definimos um grafo $\mathbb{T}$-gain como a dupla $\Phi = (G, \gamma)$, onde G é chamado de grafo subjacente a Φ e γ é chamada de função ganho de Φ. O estudo de grafos com pesos complexos foi introduzido por [4] e [6].

A matriz de adjacência de Φ, denotada $A(\Phi)$, é definida como a matriz quadrada tal que sua entrada ij é $\gamma(\overrightarrow{e_{ij}})$ se v_i é adjacênte a v_j em G e 0 caso contrário [4]. Pela defição de $A(\Phi)$ e por (1), podemos concluir que $A(\Phi)$ é uma matriz hermitiana, e portanto seus autovalores são números reais. Iremos denotar por $\lambda_1(\Phi)$ e $\rho(\Phi)$ o índice e o raio espectral de $A(\Phi)$, respectivamente.

Como a matriz $A(\Phi)$ não possui necessariamente entradas reais não negativas, não é possível garantir que teremos a igualdade $\rho(\Phi) = \lambda_1(\Phi)$. Em [5], foi estudada a relação entre $\lambda_1(\Phi)$ e $\rho(\Phi)$, estabelecendo que

$$\rho(\Phi) \leq 3\lambda_1(\Phi) \tag{2}$$

[1]bruno.scaratti@ufrgs.br
[2]rbraga@ufrgs.br

para a famíia de grafos $\Phi = (G, \gamma)$ tais que $\mathrm{Re}(\gamma(\overrightarrow{e})) \geq 0$ para toda aresta $e \in E(G)$, onde $\mathrm{Re}(z)$ denota a parte real do número complexo z. Nosso interesse está em estudar a relação entre os parâmetros $\rho(\Phi)$ e $\lambda_1(\Phi)$ quando o grafo subjacente a Φ possui somente um ciclo.

Um ciclo em um grafo é uma sequência de vértices distintos $v_1, v_2, ..., v_k$ tal que v_i é adjacente a v_{i+1} para $i = 1, ..., k-1$ e v_1 é adjacente a v_k. Um grafo unicíclico é um grafo que possui somente um ciclo. Dizemos que um grafo $\mathbb{T}$-gain é unicíclico se seu grafo subjacente G for unicíclico.

Em [1], foi desenvolvido um algoritmo que, dada uma matriz simétrica M cujo grafo subjacente seja unicíclico e um número real α, calcula quantos autovalores de M são maiores, menores ou iguais a α. Este algoritmo tem se mostrado uma ferrramenta que pode ser utilizada para investigar vários problemas relacionados ao espectro de grafos unicíclicos.

Neste trabalho estendemos o algoritmo apresentado em [1] para qualquer matriz hermitiana cujo grafo subjacente é unicíclico. Além disso, procuramos investigar propriedades espectrais dos grafos $\mathbb{T}$-gain unicíclicos, e também tentar obter uma cota para $\rho(\Phi)$ que melhore a cota presente em (2).

Como resultados parciais, apresentamos uma conjectura que dá condições para que um grafo $\mathbb{T}$-gain unicíclico Φ seja tal que $\lambda_1(\Phi) = \rho(\Phi)$. Além disso, também temos uma conjectura que melhora a cota (2) para a família de grafos $\mathbb{T}$-gain unicíclicos.

Agradecimentos

O primeiro autor gostaria de agradecer ao PPGMAp-UFRGS, ao seu orientador Dr. Rodrigo Orsini Braga e a CAPES pelo fomento.

Referências

[1] R. O. Braga, V. M. Rodrigues e R. O. Silva. "Locating Eigenvalues of a Symmetric Matrix whose Graph is Unicyclic". Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 22 (2021), pp. 659–674. DOI: 10.5540/tcam.2021.022.04.00659.

[2] S. M. Cioaba, E. R. V. Dam, J. H. Koolen e J. Lee. "Asymptotic results on the spectral radius and the diameter of graphs". Em: **Linear Algebra and its Applications** 4 (2009), pp. 722–737. DOI: 10.1016/j.laa.2009.09.016.

[3] R. A. Horn e C. R. Johnson. **Matrix Analysis**. 2nd. USA: Cambridge University Press, 2012. ISBN: 0521548233.

[4] N. Reff. "Spectral properties of complex unit gain graphs". Em: **Linear Algebra and its Applications** 9 (2012), pp. 3165–3176. DOI: 10.1016/j.laa.2011.10.021.

[5] A. Samanta e M. R. Kannan. "On the spectrum of complex unit gain graph". Em: (2023). arXiv: 1908.10668.

[6] G. Yu, H. Qu e J. Tu. "Inertia of complex unit gain graphs". Em: **Applied Mathematics and Computation** 265 (2015), pp. 619–629. DOI: 10.1016/j.amc.2015.05.105.

