Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Problema do Pomar de Pólya no Reticulado Hexagonal

Renan da Paixão Moura[1] Sueli I. R. Costa[2]
IMECC/Unicamp, Campinas, SP
Eleonesio Strey[3]
CCENS/UFES, Alegre, ES

Um reticulado Λ é um subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{R}^n$. Equivalentemente, um subconjunto $\Lambda \neq \{\mathbf{0}\}$ de $\mathbb{R}^n$ é um reticulado se, e somente se, existem vetores linearmente independentes $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \mathbb{R}^n$ tais que $\Lambda = \{\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v}_m;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Z}\}$. O conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ é dito uma base de Λ e o número m é denominado o posto de Λ. Se $m = n$ dizemos que o reticulado tem posto completo. O volume de um reticulado de posto completo é o módulo do determinante de uma matriz cujos vetores colunas formam uma base de Λ [2]. Um elemento $\boldsymbol{v}$ de um reticulado é dito primitivo se ele não é um múltiplo inteiro maior do que 1 de outro elemento do reticulado. Neste trabalho, abordaremos reticulados de posto completo em $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\Lambda = \{a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Em particular, um elemento de Λ é primitivo se, e somente se, $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$. Os reticulados que estamos particularmente interessados são o reticulado quadrado $\mathbb{Z}^2$ e o hexagonal $\mathscr{H}$. Este último é gerado por $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

O problema do pomar de Pólya, formulado por George Pólya [4], é o de determinar qual deve ser a espessura mínima dos troncos das árvores em um pomar circular regularmente espaçado para que a visão de um observador posicionado no centro do mesmo esteja completamente bloqueada em todas as direções. Dentre as muitas variações deste problema, trabalharemos com um pomar circular de raio inteiro $R > 0$. Tal pomar consiste de árvores com troncos de raio $r > 0$ centradas em todos os elementos de um reticulado que estão a uma distância δ da origem, $0 < \delta \leq R$. Considerando um observador na origem do reticulado, uma linha de visão é uma semirreta que parte da origem. Uma linha de visão está bloqueada quando intersecta alguma árvore (círculo de raio r centrado em pontos do reticulado). O objetivo é, para cada R, determinar o raio mínimo, $r_{\min}(R)$, das árvores de modo que todas as linhas de visão estejam bloqueadas. A Figura 1 ilustra, para o reticulado hexagonal $\mathscr{H}$ e $R = 3$, o raio mínimo que bloqueia todas as linhas de visão.

Se R é um inteiro, para o reticulado $\mathbb{Z}^2$ temos $r_{\min}(R) = 1/\sqrt{R^2 + 1}$ [1]. Se $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ é um reticulado de posto completo, $R > 0$ é um número real e $\boldsymbol{w}$ é um elemento primitivo de Λ que está fora do pomar e tem a menor norma possível, então $r_{\min}(R) = \mathrm{vol}(\Lambda)/\|\boldsymbol{w}\|$ [3]. Isto reduz o problema a encontrar tal norma, cujo quadrado pode ser descrito por $N(R) = \min\{\|a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2\|^2;\ a, b \in \mathbb{Z}, \mathrm{mdc}(a, b) = 1 \text{ e } \|a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2\|^2 > R^2\}$. Abordamos aqui, o problema proposto em [3] de encontrar explicitamente $r_{\min}(R)$, com R inteiro, para o reticulado $\mathscr{H}$. Nesse caso, $\|a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2\|^2 = a^2 + ab + b^2$ e $r_{\min}(R) = (\sqrt{3}/2)/\sqrt{N(R)}$, uma vez que $\mathrm{vol}(\mathscr{H}) = \sqrt{3}/2$. Quando R é par, mostramos que sempre existe um elemento primitivo de $\mathscr{H}$ com norma ao quadrado igual a $R^2 + 3$ e nunca existe elemento primitivo com norma ao quadrado igual a $R^2 + 2$. Nos casos em que $R \equiv 2 \mod 6$ ou $R \equiv 4 \mod 6$, temos $N(R) = R^2 + 3$ e, logo, $r_{\min}(R) = (\sqrt{3}/2)/\sqrt{R^2 + 3}$. No entanto, se $R \equiv 0 \mod 6$, podemos ter $N(R) = R^2 + 1$ ou $N(R) = R^2 + 3$. O Teorema 1 descreve uma maneira de determinar o raio mínimo, nesse caso. Por outro lado, se R é ímpar, existe um elemento primitivo de $\mathscr{H}$ com norma ao quadrado igual a $R^2 + 12$. Analisando congruências

[1]rpmoura@ime.unicamp.br
[2]sueli@unicamp.br
[3]eleonesio.strey@ufes.br

módulo 2 e 3, concluímos que $N(R) \in \{R^2+4, R^2+10, R^2+12\}$, se $R \equiv 3 \mod 6$, enquanto $N(R) \in \{R^2+2, R^2+6, R^2+8, R^2+12\}$, se $R \equiv 1 \mod 6$ ou $R \equiv 5 \mod 6$. Para $R = 1$ e $R = 3$ tem-se que o elemento $R\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ é primitivo e tem norma ao quadrado igual a R^2+2 e R^2+4, respectivamente. Para $R \geq 5$, o Teorema 2, descreve como determinar a existência de elementos primitivos. Na Tabela 1, temos $N(R)$ e $r_{\min}(R)$ para alguns valores de R.

Teorema 1. *Para um pomar de raio inteiro $R > 0$ no reticulado hexagonal $\mathscr{H}$, com $R \equiv 0 \mod 6$, temos: Se $\Delta(R,l) = R^2 - 6Rl - 3l^2 + 4$ é um quadrado perfeito positivo e $\mathrm{mdc}(R+l, \sqrt{\Delta(R,l)}) \leq 2$ para algum inteiro l, com $1 \leq l < \sqrt{4(R^2+1)/3} - R$, então $r_{\min}(R) = (\sqrt{3}/2)/\sqrt{R^2+1}$. Caso contrário, $r_{\min}(R) = (\sqrt{3}/2)/\sqrt{R^2+3}$.*

Teorema 2. *Sejam R e s inteiros, com R ímpar e s par, tais que $R \geq 5$ e $2 \leq s \leq 10$. Existe um elemento primitivo no reticulado hexagonal $\mathscr{H}$ com a norma ao quadrado igual a $R^2 + s$ se, e somente se, $\Delta(R,s,l) = R^2 - 6Rl - 3l^2 + 4s$ é um quadrado perfeito positivo e $\mathrm{mdc}(R + l, \sqrt{\Delta(R,s,l)}) \leq 2$ para algum inteiro l, com $1 \leq l < \sqrt{4(R^2+s)/3} - R$.*

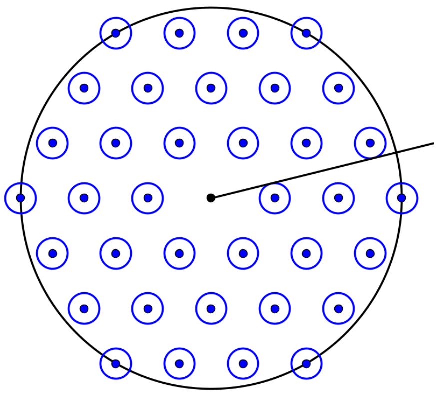

Figura 1: Pomar em $\mathscr{H}$ com $r = r_{min}(3)$. Fonte: dos autores.

Tabela 1: Valores para $r_{\min}(R)$ em $\mathscr{H}$.

R	$N(R)$	$r_{min}(R)$
1	R^2+2	0.500
2	R^2+3	0.327
3	R^2+4	0.240
4	R^2+3	0.199
5	R^2+6	0.156
6	R^2+1	0.142
7	R^2+8	0.115
8	R^2+3	0.106
9	R^2+10	0.091
10	R^2+3	0.085
11	R^2+6	0.077
12	R^2+3	0.071
13	R^2+12	0.064

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, da FAPESP 2020/09838-0 e do CNPq 405842/2023-6.

Referências

[1] T. T. Allen. “Polya’s Orchard Problem”. Em: **The American Mathematical Monthly** 93.2 (1986), pp. 98–104. DOI: 10.2307/2322700.

[2] J. H. Conway e N. J. A. Sloane. **Sphere packings, lattices and groups**. 2ª ed. New York: Springer Science & Business Media, 1993. ISBN: 978-1-4757-2251-2.

[3] C. P. Kruskal. “The orchard visibility problem and some variants”. Em: **Journal of Computer and System Sciences** 74.4 (2008), pp. 587–597. DOI: 10.1016/j.jcss.2007.06.004.

[4] G. Pólya. “Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde”. Em: **Arch. Math. Phys** 27 (1918), pp. 135–142.