Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Resolvendo a Equação de Poisson com Diferentes Condições de Fronteira com MFEM

Juan S. C. Franco[1]
USP, São Paulo, SP
Juan C. Galvis[2]
UNAL, Bogotá, Colombia

Neste trabalho, discutiremos o método de elementos finitos para resolver equações diferenciais parciais. Veremos primeiro a ideia geral desse método de discretização e como resolvê-lo quando houver diferentes tipos de condições de fronteira (Dirichlet, Neumann and Robin). Finalmente mostraremos o uso da biblioteca MFEM [5] para resolver este tipo de problemas considerando a seguinte equação diferencial, cujo o domínio é retangular com dois buracos:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla u) &= 2\pi e^{-x_1}(2\pi\cos(2\pi x_1)-\sin(2\pi x_1)) \\ \partial_{\hat{n}_1} u &= -e^{x_2}\cos(2\pi x_1) \text{ em } \Gamma_1, \\ \partial_{\hat{n}_2} u &= e^{x_2}\cos(2\pi x_1) \text{ em } \Gamma_2, \\ u &= e^{x_2}\cos(2\pi x_1) \text{ em } \Gamma_3, \\ \partial_{\hat{n}_3} u &= \frac{e^{x_2}[2\pi(2x_1-1)\sin(2\pi x_1)-2x_2\cos(2\pi x_1)]}{\sqrt{(2x_1-1)^2+4x_2^2}} \text{ em } \Gamma_4, \end{aligned} \tag{1}$$

onde, $\rho(x) = \begin{bmatrix} e^{-(x_1+x_2)} & 0 \\ 0 & e^{-(x_2+x_2)} \end{bmatrix}$, Γ_1, Γ_2 são a parte superior e inferior, respectivamente, do retângulo e Γ_3, Γ_4 são as fronteiras das circunfêrencias esquerda e direita, respectivamente.

Seja $\overrightarrow{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Queremos achar a solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\overrightarrow{F}(u)) &= f \text{ em } \Omega, \\ u &= g \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Consideramos função teste $v \in V$ onde V é o espaço de todas as funções teste (V pode ser o espaço de polinômios). Multiplicando por v na primeira equação, intregando no domínio, usando integração por partes e o teorema da divergência temos que,

$$\textstyle\int_\Omega \nabla v \cdot \overrightarrow{F}\, dx - \int_{\partial\Omega} v\overrightarrow{F} \cdot \hat{\eta}\, dS_x = \int_\Omega f v\, dx. \tag{3}$$

Se supormos que $v(x) = 0$ em $\partial\Omega$, o segundo termo dessa equação é zero. Usando o método de Petrov-Galerking, escolhemos $V_n \subset V$ (espaço solução) e escrevemos como $u = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j$ com $\phi_j, j = 1, \ldots, N$ base de V_n. Dessa forma, para encontrar os escalares α_j consideramos M funções testes. Supondo $\overrightarrow{F}$ linear e usando a equação (3), lembrando que o segundo termo dessa equação (3) é zero, conseguimos discretizar o problema, obtendo o seguinte sistema linear

$$\textstyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \overrightarrow{F}(\phi_j)\, dx \right) = \int_\Omega f\varphi_i\, dx, \quad i = 1, \ldots, M. \tag{4}$$

No caso da equação de Poisson consideramos $\overrightarrow{F}(u) = \nabla u$.

[1]jcastanof@ime.usp.br
[2]jcgalvisa@unal.edu.co

Agora, no caso que temos um problema com diferentes condições de fronteira vamos considerar (2) com $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ onde Γ_1 tem condição de Dirichlet, Γ_2 condição de Neumann e Γ_3 condição de Robin.

Usando (3), dividindo a integral da fronteira em cada Γ_i com $i = 1, 2, 3$, considerando $u = u_1 + u_0$, onde $u_0(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega - \Gamma_1$, $u_0(x) = g_1$ para $x \in \Gamma_1$ e $u_1(x) = 0$ em Γ_1. Supondo que $v = 0$ em Γ_1 e usando as condições de fronteira sob $u_1 + u_0$, obtemos que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u_1 \, dx + \tfrac{b}{a}\int_{\Gamma_3} u_1 v \, dS_x = \int_\Omega f v \, dx - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u_0 \, dx + \int_{\Gamma_2} v g_2 \, dS_x + \int_{\Gamma_3} \tfrac{1}{a} v g_3 \, dS_x. \tag{5}$$

Finalmente, u_0 e u_1 podem ser escritos como combinação linear de elementos da base do espaço solução em Γ_1 e do espaço solução V_n, respectivamente. Isto é, $u_0 = \sum_{\phi_l \in \Gamma_1} \alpha_l \phi_l$ e $u_1 = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \phi_j$. Dessa forma, temos que a discretização desse problema é

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_j \left(\int_\Omega \nabla\phi_j \nabla\varphi_i \, dx + \tfrac{b}{a}\int_{\Gamma_3} \phi_j \varphi_i \, dS_x \right) = \int_\Omega f \varphi_i \, dx - \sum_{\phi_l \in \Gamma_1} \alpha_l \int_\Omega \nabla\phi_l \nabla\varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 \varphi_i \, dS_x + \tfrac{1}{a}\int_{\Gamma_3} g_3 \varphi_i \, dS_x, \tag{6}$$

com $i = 1, \ldots, M$. Para mais detalhes do método de elementos finitos ver [3].

Agora, a ideia é ver como escrever e resolver o problema usando a biblioteca MFEM. Vamos mostrar como implementar a equação (6) usando MFEM para o problema (1).

1. Definimos o vetor u como uma função de elementos finitos paralela com `ParGridFunction`.

2. Agora devemos configurar a parte esquerda da equação (6) no espaço de elementos finitos, acrescentando o integrador de difusão do domínio.

```
ParBilinearForm a(&fespace);
BilinearFormIntegrator *integ = new DiffusionIntegrator(rho);
a.AddDomainIntegrator(integ);
a.Assemble();
```

3. Para terminar a parte do método FEM devemos calcular o lado direito da equação (6) considerando todas as condições de fronteira, para isso, criamos b e fazemos,

```
ParLinearForm b(&fespace);
u.ProjectBdrCoefficient(g3,dbc_bdr3);
b.AddDomainIntegrator(new DomainLFIntegrator(f_an));
b.AddBoundaryIntegrator(new BoundaryLFIntegrator(m_nbcCoef),nbc_bdr);
b.Assemble();
```

A solução exata do problema é $u = e^{x_2}\cos 2\pi x_1$. Resolvendo o problema, encontramos um erro na norma H^1 de 0.0683466. Para mais informações do trabalho e do gráfico encontrado ver [2]. Outras referências usadas para conhecer MFEM são [1] e [4].

Referências

[1] R. Anderson, A. Barker, J. Bramwell, J. Cerveny, J. Dahm, V. Dobrev, Y. Dudouit, A. Fisher, T. Kolev, M. Stowell e V. Tomov. “MFEM: A Modular Finite Element Method Library.” Em: **IBM Research** (2018).

[2] J. Castaño. **Beyond-Research-project. GitHub.** Online. Publicado em 2022, `https://github.com/Juan051099/Beyond-Research-project.git`.

[3] C. Johnson. **Numerical solution of partial differential equations by the finite element method.** reimpressão. Courier Corporation, 2012. ISBN: 0486131599.

[4] mfem-web. **Example Codes and Miniapps. MFEM: Modular Finite Element Methods Software.** Online. Acessado em 21/11/2022, `https://mfem.org/examples/`.

[5] mfem-web. **MFEM: Modular Finite Element Methods Software.** Online. Acessado em 21/11/2022, `https://mfem.org/`.

