Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Algumas Novas Interpretações para os Números de Catalan

Leandro R. [1]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP
Elen V. P. S. [2]
INMA/UFMS, Campo Grande, MS

**Resumo.** Em combinatória, bijeções são usadas para mostrar que certas classes de objetos são contadas pelo mesmo número finito. Em alguns casos, se um subconjunto $A_0$ finito cuja contagem é complicada e nos interessa, tentamos uma bijeção de forma a simplificar $A_0$ para $B_0 = \phi(A_0)$. Assim, o principal objetivo é mostrar que $|A| = |B|$, e para isso, basta determinar uma bijeção. Conforme [4] temos várias bijeções envolvendo os números de Catalan, dentre elas o conjunto de Árvores Binárias, Árvores Ordenadas, Árvores Binárias Cheias, Parênteses bem-formados, Problema Eleitoral.

De acordo com Dershowitz [1], o conjunto de árvores ordenadas com $n$ arestas é denotado por $T_n$ $(n \geq 0)$ . O número de elementos desse conjunto forma a sequência com primeiros termos $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ...$,[[2], A000108].

Esses são os conhecidos números de Catalan, definidos por: $C_n = |T_n| = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Podemos encontrar em [2] várias interpretações para estes números. Na construção de $T_n$ nos deparamos com o seguinte resultado:

**Teorema 1.** *$C_n$ é número de sequências com $n$ dígitos inteiros onde cada digito é menor do que ou igual ao seu sucessor e os $n-1$ primeiros dígitos são menores do que ou iguais as suas respectivas posições.*

Posteriormente foi verificado que tal resultado já foi enunciado e provado em [3] como sequências $(a_1, \ldots, a_n)$ com $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ de inteiros tais que $a_i \leq i$.

Agora, analisando tais sequências, por exemplo $n = 3$ temos: (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,2) e (1,2,3). Usando a notação de ciclos e relacionando com (2,3,4) temos $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&4\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$, obtendo as seguintes árvores ordenadas:

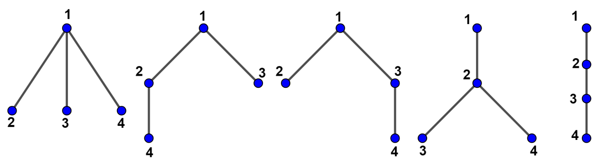


Figura 1: Árvores ordenadas $T_3$. Fonte: dos autores.

**Corolário 1.** *$C_n$ é soma dos primeiros termos de cada sequência com $n$ dígitos.*

[1]l219981@dac.unicamp.br
[2]elen.spreafico@ufms.br

 

**Proposição 1.** $C_n^{(2)} = C_{n+3} + C_{n+2}$ *é soma dos segundos termos de cada sequência com* $n$ *dígitos,* $(a_1, \ldots, a_n)$*, com* $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$*, de inteiros tais que* $a_i \le i$*. Com primeiros termos 7,19,56,174,..., [[2], A005807].*

Considere a árvore ordenada tal que a raiz tem grau 2 e se o vértice $x$ tem grau $k$ então os filhos de $x$ têm graus $k+1, k, ..., 2$, respectivamente.

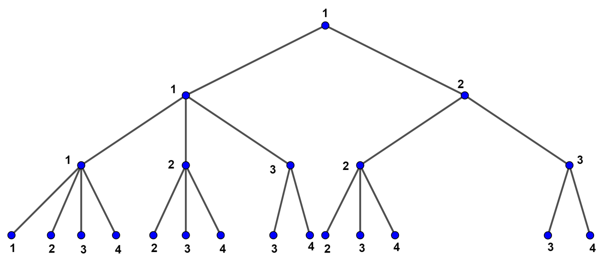


Figura 2: Árvore de Catalan. Fonte: dos autores.

Note que a soma dos segundos dígitos é a soma do número de caminhos que passam pelo nó 1 ($|P_{n_1}|$) no nível 1 e duas vezes o número de caminhos que passam pelo nó 2 no nível 2 ($2|P_{n_2}|$). Temos que $2|P_2| = 2C_n$, pois o número de vértices do último nível dessa subárvore à direita tem uma bijeção com os números de Catalan.

Note que $|P_{1_n}| + 2|P_{2_n}| - C_n - C_{n+1} = |P_{1_n}| + C_n - C_{n+1} = |P_{1_n}| - (C_{n+1} + C_n)$ $= |P_{1_n}| - \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = |P_{1_n}| - \frac{2n!^2}{n!}\left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)} - \frac{1}{(n+1)}\right) = |P_{1_n}| - \binom{2n}{n}\left(\frac{(2n+2)(2n+1)-(n+1)(n+3)}{(n+1)^2(n+2)}\right) = |P_{1_n}| - \binom{2n}{n}\frac{3n(n+1)}{(n+1)^2(n+2} = |P_{1_n}| - \frac{2n!3n}{(n+2)n!} =$ $|P_{1_n}| - \frac{3(2n!)}{(n+2)(n-1!)}$. Conforme [[2] A000245], $|P_{1_n}| = \frac{3(2n!)}{((n+2)(n-1!)}$, provando assim a Proposição 1.

Seja $T$ o operador linear tal que se $(a_n) = (a_1, a_2, ...,)$ então $T((a_n)) = (a_1 + a_2, a_2 + a_3, ..., a_n + a_{n+1}, ...)$. Seguem mais dois resultados envolvendo os números de Catalan e tais sequências.

**Proposição 2.** $C_n^{(3)} = 2(C_n + C_{n+1}) + C_{n+2}$ *é soma dos terceiros termos de cada sequência com* $n$ *dígitos,* $(a_1, \ldots, a_n)$*, com* $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$*, de inteiros tais que* $a_i \le i$*. Com primeiros termos 11,28,80,244,.... Também* $C_n^{(3)} = T^2(C_n)_{n+1} + C_{n+1}$*.*

**Proposição 3.** $C_n^{(4)} = C_{n+4} + 3C_{n+3} + 4C_{n+2} + 5C_{n+1}$ *é soma dos quartos termos de cada sequência com* $n$ *dígitos,* $(a_1, \ldots, a_n)$*, com* $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$*, de inteiros tais que* $a_i \le i$*. Com primeiros termos: 42, 114, 339, 1063, 3455, ....Também* $C_n^{(4)} = T^3(C_n) + 4C_{n+1} + C_{n+2}$*.*

# Referências


[1] N. Dershowitz e S. Zaks. "Enumerations of ordered trees." Em: **Discrete Mathematics** 31 (1980), pp. 9–28.

[2] N. J. A. et al Sloane. **The on-line encyclopedia of integer sequences**. 2008.

[3] R. Stanley. **Enumerative Combinatorics: Volume 2**. Cambridge University Press, 2023.

[4] D. Stanton e D. White. **Constructive combinatorics**. Springer Science & Business Media, 2012.


 