Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

# A adequação do sistema de Tableaux TLꓘ

**Helen G. da Silva*, Luiz Henrique da C. Silvestrini**
Departamento de Matemática, FC, UNESP
17033-360, Bauru, SP
E-mails: silvestrini@fc.unesp.br; helen-277@hotmail.com

**RESUMO**

No presente trabalho, utilizamos o sistema de tableaux analíticos **TLꓘ,** introduzido em [5], o qual foi construído como um sistema dedutivo alternativo à *Lógica do Poucos*, apresentado por Oliveira em 2011. Esta lógica, ao propor uma formalização para o quantificador 'poucos' da linguagem natural, é construída inspirada em um sistema axiomático modulado, segundo o qual a noção de 'muitos' é internalizada em nível da linguagem objeto. Desse modo, estabeleceremos a adequação do sistema **TLꓘ**, ou seja, demonstraremos a correção e completude desse novo sistema em relação à Lógica do Poucos.

**Palavras-chave**: *Lógicas Moduladas, Tableaux Analíticos.*

## Introdução

A Teoria da Prova constitui-se como um domínio de investigação avançado da Lógica, e ainda, compreendida como *demonstração automática* de teoremas consolida-se como uma profícua subárea da Teoria da Computação. O estudo das propriedades estruturais de provas formais constitui o cerne da pesquisa relacionada à Teoria da Prova, que por sua vez está relacionada com o conceito de decidibilidade desde os tempos de David Hilbert (1862-1943).

Os *sistemas de provas*, introduzidos por Gerhard Gentzen em [2], eram caracterizados por admitir o princípio das subfórmulas. Além disso, a teoria da prova desenvolvida por Gentzen consistia em demonstrar a validade de um argumento de uma maneira usualmente mais rápida, apenas trabalhando com regras em métodos finitários. Esses sistemas de provas são hoje conhecidos como *Dedução Natural* e *Cálculo de Sequentes*.

Os métodos de dedução criados por Gentzen culminaram no surgimento do *método de tableaux*, o qual também estabelece estruturas que permitem a representação e a dedução formal de conhecimento. Um tableau é mais adequado, em relação ao sistema axiomático, para implementações em computadores, pois este pode ser definido como uma *árvore ordenada diádica*.

Smullyan, em 1968 (cf. [6]), cunhou o termo *tableaux analíticos*. Este método dedutivo pode ser considerado uma variante dos métodos de Hintikka, como destaca o próprio Smullyan (1968, p. 15).

Um sistema de tableaux é apresentado apenas com *regras de expansão* ou regras para a construção dos tableaux como uma árvore ordenada diádica, as quais permitem a análise das fórmulas de uma linguagem $\mathcal{L}$ (cf. [1]). A noção de expansão é justamente expandir um ramo de um tableau. Empregamos a palavra "ramo" para designar um caminho ou uma possibilidade de análise das fórmulas dadas.

Por outro lado, a Lógica do Poucos, introduzida por Oliveira em [4], foi inspirada em uma dualização para uma lógica modulada que formaliza o quantificador 'muitos' da linguagem natural. A noção de quantificador será utilizada aqui como em [3].

Silva e Silvestrini em [5] propuseram o sistema de tableaux **TLꓘ**, caracterizado como um sistema dedutivo alternativo ao axiomático apresentado em [4]. Neste trabalho, propomos explicitar a correção e completude do sistema **TLꓘ** proposto em [5].

* Bolsista de Iniciação Científica. Processo FAPESP nº 2012/10272-5.

 © 2015 SBMAC

## Materiais e Métodos

Trata-se de um trabalho teórico e a presente pesquisa possibilita reconhecer o método de tableaux como um método alternativo ao axiomático, dessa maneira, utilizamos o método das árvores ordenadas diádicas para definir uma sequência de tableau e explicitamos os teoremas necessários para estabelecer a adequação do sistema **TLꓘ**.

## Objetivo

Demonstrar a correção e completude do sistema de tableaux **TLꓘ**, em relação à Lógica do Poucos, introduzida por Oliveira em [4].

## Resultados e Discussão

Consideremos que no sistema de tableaux **TLꓘ**, $\Gamma \Vdash \varphi$ denota que a fórmula $\varphi$ é consequência analítica (i.e., existe um tableau fechado para $\varphi$) a partir de um conjunto $\Gamma$ de fórmulas, e ainda, que no sistema hilbertiano da Lógica do Poucos (**LP**), denotamos que $\varphi$ é uma consequência sintática de $\Gamma$, por $\Gamma \vdash \varphi$, de acordo com as definições da lógica clássica, ou seja, existe uma demonstração de $\varphi$ a partir de $\Gamma$, via axiomas da Lógica do Poucos. A partir disso, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \Vdash \varphi$. Desse modo, todas as sentenças demonstradas na **LP**, também são demonstradas no sistema **TLꓘ**, e vice-versa. Por fim, uma vez que a **LP** foi demonstrada ser correta e completa em [4], então nosso sistema também será correto e completo.

## Considerações Finais

Abordamos neste trabalho a Lógica do Poucos em um sistema de tableaux analíticos introduzido via regras de expansão conforme apresentado em [5]. Em seguida, demonstramos alguns teoremas para estabelecer a equivalência dedutiva entre o sistema axiomático de Oliveira e o nosso sistema **TLꓘ**. Dessa maneira, demonstramos que $\Gamma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$, e nesse sentido, estabelecemos a equivalência entre as consequências lógicas de cada sistema dedutivo apresentado. Uma vez que Oliveira em [4] demonstrou a correção e completude do sistema axiomático de **LP**, se $\Gamma \vDash \varphi$ denota que $\varphi$ é consequência semântica de $\Gamma$, sabemos que $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$, consequentemente, o sistema de tableaux **TLꓘ** também será correto e completo.

## Referências

[1] M. C. Fitting, Introduction. In: M. D´Agostino; D. V. Gabbay; R. Hahnle; J. Posegga (Eds.). *Handbook of Tableaux Methods*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 1- 43, 1999.

[2] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schlieben. *Mathematische Zeitschrift*. v. 39. 1935.

[3] A. Mostowski, *On a generalization of quantifiers*. Fundamenta Mathematicae, 44:12-36, 1957.

[4] K. E. C. S. Oliveira, *Uma lógica do poucos*. Dissertação de Mestrado. FFC-UNESP. Marília, 2011.

[5] H. G. da Silva; L. H. C. Silvestrini. *Tableaux para uma lógica quase-modulada do 'poucos'*. Anais do II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional – Sudeste. Bauru, 2013.

[6] R. M. Smullyan. *First-order logic*. New York: Springer-Verlag/Dover Publication, 1968.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0112  © 2015 SBMAC