Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Zeros de Polinômios Ortogonais de Sobolev Relacionados a Um Par Coerente de Medidas

Lucas T. da Silva[1] Vanessa A. Botta[2]
FCT-Unesp, Presidente Prudente, SP

A teoria dos polinômios ortogonais tem se expandido muito nas últimas décadas e, consequentemente, tem atraído a atenção de inúmeros pesquisadores. De modo geral, essa teoria iniciou-se com o estudo de um caso especial de fração contínua [1, 6].

Neste trabalho, consideraremos os polinômios ortogonais com relação ao produto interno de Sobolev $< \cdot, \cdot >_{\mathfrak{S}}$ dado por

$$< f, g >_{\mathfrak{S}} = \int_a^b f(x)g(x)d\psi_0(x) + \lambda \int_a^b f'(x)g'(x)d\psi_1(x), \tag{1}$$

onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\lambda > 0$ e $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ é um par de medidas positivas. Desta forma, dizemos que uma sequência de polinômios $\{S_n^\lambda\}_{n\geq 0}$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais de Sobolev se S_n^λ é de grau n e

$$< S_n^\lambda, S_m^\lambda >_{\mathfrak{S}} = \rho_{n,S}\delta_{n,m}, \tag{2}$$

onde $\rho_{n,S} > 0$ e $\delta_{n,m}$ é o delta de Kronecker.

A motivação para o estudo desses polinômios surgiu na teoria de aproximação, mais precisamente no problema de mínimos quadrados [3]. De acordo com [4], a pesquisa sobre os polinômios ortogonais de Sobolev ficou inativa por quase duas décadas, ressurgindo apenas quando o conceito de pares coerentes de medidas foi introduzido, o qual será apresentado a seguir.

O par de medidas $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ recebem o nome de par coerente de medidas se as respectivas sequências de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n^{\psi_0}(x)\}_{n\geq 0}$ e $\{P_n^{\psi_1}(x)\}_{n\geq 0}$ satisfazem

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{P'^{\psi_0}_{n+1}}{n+1} + D_n \frac{P'^{\psi_0}_n}{n}, \ n \geq 1, \tag{3}$$

com $D_n \neq 0$.

O conceito de par coerente de medidas introduzido por A. Iserles e outros em [2], e foi essencial em pesquisas sobre polinômios ortogonais de Sobolev. Consideraremos $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ como par de medidas coerentes. Seja $\{S_n^\lambda(x)\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com respeito ao produto interno (1). O objetivo desse trabalho é estudar os zeros de $S_n^\lambda(x)$.

Para o estudo dos zeros de $S_n^\lambda(x)$ é conveniente dividir os pares coerentes em três classes. Note que as classes não são completamente disjuntas.

Tipo A

(i) $(a, b) = (0, +\infty)$, $d\psi_0 = (x-\xi)x^\alpha e^{-x}dx$, $d\psi_1 = x^{\alpha+1}e^{-x}dx$, com $\xi \leq 0$, $\alpha > -1$;

(ii) $(a, b) = (-1, 1)$, $d\psi_0 = (x-\xi)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $d\psi_1 = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx$, com $\xi \leq 1$, $\alpha, \beta > -1$.

[1] lucas.tertuliano@unesp.br
[2] vanessa.botta@unesp.br

Tipo B

(iii) $(a, b) = (0, +\infty)$, $d\psi_0 = e^{-x}dx + M\delta(0)$, $d\psi_1 = e^{-x}dx$, com $M \geq 0$;

(iv) $(a, b) = (-1, 1)$, $d\psi_0 = (1-x)^\alpha dx + M\delta(-1)$, $d\psi_1 = (1-x)^{\alpha+1}dx$, com $\alpha > -1$, $M \geq 0$.

Tipo C

(v) $(a, b) = (0, +\infty)$, $d\psi_0 = x^\alpha e^{-x}dx$, $d\psi_1 = x^{\alpha+1}e^{-x}/(x-\xi)dx + M\delta(\xi)$, com $\xi \leq 0$, $\alpha > -1$, $M \geq 0$;

(vi) $(a, b) = (-1, 1)$, $d\psi_0 = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $d\psi_1 = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}/(x-\xi)dx + M\delta(\xi)$, com $\xi \leq -1$, $\alpha, \beta > -1$, $M \geq 0$.

Apresentaremos a seguir, alguns resultados a respeito do polinômio $S_n^\lambda(x)$, mostrando que $S_n^\lambda(x)$ tem n zeros reais, distintos e a localização desses zeros em relação a outros polinômios ortogonais. Mais detalhes podem ser vistos em [5].

Teorema 1. *Seja $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ um par de medidas coerentes do tipo A,B ou C. Seja $\{P_n^{\psi_0}(x)\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com respeito à medida $d\psi_0$. Então, para $n \geq 2$:*

(i) $S_n^\lambda(x)$ tem n zeros reais, distintos e no máximo um deles está fora do intervalo (a, b);

(ii) Os zeros de $S_n^\lambda(x)$ entrelaçam-se com os zeros de $P_n^{\psi_0}(x)$: se $p_{1n} < p_{2n} < \ldots < p_{nn}$ são os zeros de $P_n^{\psi_0}(x)$ e $s_{1n} < s_{2n} < \ldots < s_{nn}$ os zeros de $S_n^\lambda(x)$, então $s_{1n} < p_{1n} < s_{2n} < p_{2n} < \ldots < s_{nn} < p_{nn}$;

(iii) Os $n-1$ zeros de $P_{n-1}^{\psi_0}(x)$ separam os zeros de $S_n^\lambda(x)$.

Além do resultado apresentado acima, serão analisados outros resultados que envolvem o comportamento dos zeros de $S_n^\lambda(x)$.

Agradecimentos

À fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processo Número 2022/08314-3).

Referências

[1] P. L. Chebyshev. “Sur les valeurs limites des inégrales”. Em: **J. Math. Pures Appl.** 19 (1874), pp. 157–160.

[2] A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Nørsett e J.M. Sanz-Serna. “On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products”. Em: **J. Approx. Theory** 65 (1991), pp. 151–175.

[3] D.C. Lewis. “Polynomial least square approximations”. Em: **Amer. J. Math.** 69 (1947), pp. 273–278.

[4] F. Marcellán e Yuan Xu. “On Sobolev orthogonal polynomials”. Em: **Expo. Math.** 33 (2015), pp. 308–352.

[5] H.G. Meijer e M.G. de Bruin. “Zeros of Sobolev orthogonal polynomials following from coherent pairs”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 139.2 (2002), pp. 253–274.

[6] T. J. Stieltjes. “Recherches sur les fractions continues”. Em: **Ann. Fac. Sci.** 8 (1894).