Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparativo entre os Métodos de Newton-Rhaphson e Schröder para Obtenção de Zeros de Funções com Raízes Múltiplas

Anderson C. da S. Morais[1] João V. da S. Cruz[2] Matheus da S. Menezes [3] Caroline G. Toscano [4]
DCME/UFERSA, Mossoró, RN

A obtenção de raízes de funções consiste em encontrar um valor x tal que $f(x) = 0$ e nem sempre é uma tarefa trivial. Os métodos numéricos para obtenção de raízes de funções são uma opção para obtenção de raízes aproximadas em problemas matemáticos cuja a função não possui uma metodologia bem definida para seu cálculo analítico. Nesse contexto, o método de Newton-Raphson é uma boa opção, cujo funcionamento parte de uma aproximação inicial e, ao atender algumas condições iniciais, consegue, através de um processo iterativo, encontrar uma raiz aproximada suficientemente boa [1].

O método fundamenta-se na premissa de que, a partir de uma aproximação inicial de uma raiz x_i, pode-se traçar uma reta tangente à curva da função $f(x)$ no ponto $(x_i,\, f(x_i))$. Essa reta tangente é então utilizada para encontrar um novo ponto de interseção com o eixo x, o qual se torna a próxima aproximação da raiz, usualmente representa uma estimativa melhorada da raiz [2].

Assim, no ponto $(x_i,\, f(x_i))$ a reta tangente à curva neste ponto é:

$$L_i(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \tag{1}$$

Em $L_i(x) = 0$ e considerando $x = x_{i+1}$, tem-se:

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2}$$

Apesar do método de Newton-Raphson ser eficiente e possuir convergência quadrática [2], são exigidas algumas condições para a garantia dessa convergência. Dependendo das características do problema e da precisão desejada, a convergência pode ser lenta e o número de iterações pode ser significativamente elevado, impactando no tempo de processamento computacional. O Método de Newton apresenta convergência linear quando uma raiz tem multiplicidade $m > 1$, pois à medida que $f(x) \to 0$, $f'(x) \to 0$, na equação 2.

Uma forma de lidar com o problema é utilizando o método de Schröder, que é uma modificação do método de Newton Raphson, acrescentando a multiplicidade da raiz no intervalo, representada pelo fator m, buscando acelerar a convergência de aproximação da raiz, obtendo assim a seguinte equação:

[1]anderson.morais92395@alunos.ufersa.edu.br
[2]joao.cruz@alunos.ufersa.edu.br
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]caroline.toscano@ufersa.edu.br

$$x = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{3}$$

Com o objetivo de atestar a eficiência do método de Schröder em relação ao método de Newton-Raphson, realizamos um experimento computacional considerando funções com raízes múltiplas [3]. As funções utilizadas e seus intervalos foram:

- $f_1(x) = x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 22x^2 + 4x - 24$, no intervalo $[0, 5]$, $m = 3$ e $x_0 = 3$.
- $f_2(x) = e^x - x - 1$, no intervalo $[0, 2]$, $m = 2$ e $x_0 = 1$.
- $f_3(x) = (x - 3)^5 \log_e(x)$, no intervalo $[2, 5]$, $m = 5$ e $x_0 = 4$.
- $f_4(x) = x^3 - 9x + 5$, no intervalo $[0, 2]$, $m = 1$ e $x_0 = 1$.

Os cálculos foram realizados por meio da linguagem de programação Python3, considerando as equações 2 para o método de Newton-Raphson e o cálculo da raiz via equação 3 para o método de Schröder, com o cálculo da derivada calculado numericamente com $dx = 0.00001$. Como critérios de parada foram usados $f(x) < 10^{-10}$ ou um limite de 500 iterações. Os experimentos foram realizados em um computador do tipo *notebook* com sistema operacional Ubuntu 22.04 LTS, com processador AMD ryzen 5 5500U, memória RAM de 12GB ddr4 3200mhz e um SSD NVME de 256GB de armazenamento.

Tabela 1: Raízes encontradas e número de iterações por método.

Função	Iterações	Newton-Raphson	Iterações	Schröder
f_1	23	2.000177450578	4	2.000011097432
f_2	19	0.000009529439	4	0.000008352556
f_3	22	3.009773351005	3	3.000091888817
f_4	5	0.576887523917	5	0.576887523917

Conforme demonstrado na Tabela 1, verificou-se que com o método de Schröder a eficiência para encontrar das raízes das funções foi melhor do que com o método de Newton Raphson, tendo em vista que houve uma diminuição nas quantidades de iterações, com exceção da função f_4 em que ambos os métodos foram igualmente eficientes. É importante destacar que a eficiência do método de Schröder depende do valor de m, assim sendo necessário uma análise prévia de m para encontrar o melhor valor para determinada função.

Referências

[1] M. A. G. Ruggiero e V. L. R. Lopes. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2a Ed. São Paulo: Makron Books, 1997.

[2] S. C. Chapra. **Métodos numéricos para engenharia.** 5a Ed. McGrw-Hill, 2008.

[3] F. F. C. Filho. **Algoritmos numéricos.** 2a Ed. LTC, 2010.