

Modelagem Matemática do Movimento Bidimensional de Projéteis sob a Resistência do Ar

Leonardo P. Bentes,¹ Alessandro A. dos S. Michiles²
UEA, Manaus, AM

Neste trabalho, estruturou-se um modelo matemático que descreve as principais características do Movimento Bidimensional de Projéteis (MBP) sob a Resistência do Ar (RA), utilizando a Segunda Lei de Newton e baseando-se em [2] e [1]. Dessa forma, modelou-se o lançamento de um corpo esférico no qual: (i) a altura de lançamento e de chegada são iguais; (ii) não há a ação de ventos; (iii) a altura máxima não sofre influência da variação da gravidade, \vec{g} ; (iv) o alcance horizontal não sofre interferência da rotação da Terra. Determinaram-se as equações do MBP sob a RA por meio da introdução da força de arrasto (\vec{F}_R), dada por:

$$\vec{F}_R = -\alpha \vec{v} \quad (1)$$

na qual α é o coeficiente de amortecimento imposto pelo ar e \vec{v} é a velocidade do corpo esférico. Contudo, o modelo matemático apresentado na equação (1) funciona bem apenas quando a velocidade do corpo, em relação ao fluido que o cerca, é baixa. Dessa forma, para determinar valores realistas de α para o MBP sob a RA, que costuma ocorrer a velocidade mais altas que o previsto pela equação (1), considerou-se a situação em que o corpo está em queda vertical sob o efeito do arrasto e chega à sua velocidade terminal \vec{v}_t , atingindo o equilíbrio entre \vec{F}_R e a força gravitacional, $\vec{F}_g = m\vec{g}$. Portanto:

$$|\vec{F}_R| = |\vec{F}_g| \Rightarrow \alpha v_t = mg \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{v_t} \quad (2)$$

Para determinar v_t , utilizou-se outra equação que envolve a força de arrasto, adequada para velocidades mais altas, ou seja:

$$|\vec{F}_R| = |\vec{F}_g| \Rightarrow \frac{1}{2}\rho ADv_t^2 = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AD}} \quad (3)$$

sendo ρ a massa específica do ar, A a área da seção transversal na direção perpendicular ao movimento e D o coeficiente de arrasto. Além das equações do movimento, nas coordenadas x e y , obtiveram-se aquelas para o tempo de subida (t_s), o tempo de voo (t_v), a altura máxima (H), o alcance (R) e a trajetória ($y(x)$). Realizaram-se simulações com as equações obtidas, escolhendo-se três corpos esféricos distintos (bolas de gude, bilhar e futebol) e fazendo análises comparativas com o lançamento no vácuo. Apresenta-se o resultado de uma dessas simulações na Figura 1, na qual se observam as trajetórias para cada um dos quatro casos (vácuo - C1; bolas de gude - C2, bilhar - C3 e futebol - C4), tendo, como dados de entrada, o ângulo (θ_0) e a velocidade (v_0) de lançamento, respectivamente, iguais a 35,0 e 33,5m/s.

¹leonardopessoa126@gmail.com

²amichiles@uea.edu.br

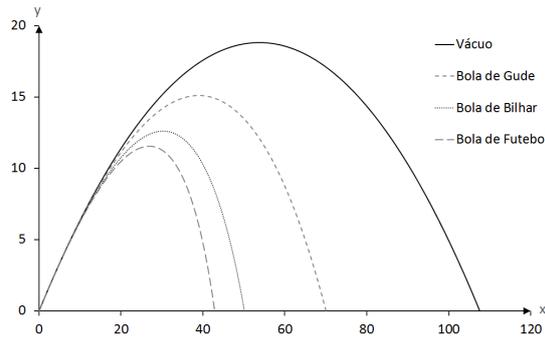


Figura 1: Trajetórias do MBP para cada um dos quatro casos estudados, obtidas nas simulações.

Os dados obtidos nas simulações da Figura 1 foram quantificados e dispostos na Tabela 1, em que θ_{om} e R_m são, respectivamente, o ângulo e alcance máximo para cada caso estudado.

Tabela 1: Dados do MBP para cada um dos quatro casos estudados, obtidos nas simulações.

Grandeza (unidade)	Vácuo	Bola de Gude	Bola de Bilhar	Bola de Futebol
$t_s(s)$	1,96	1,66	1,45	1,36
$t_v(s)$	3,92	3,52	3,24	3,11
$\lambda = t_v/t_s$	2,00	2,12	2,23	2,29
$H(m)$	18,8	15,1	12,6	11,6
$R(m)$	108	70,1	50,1	42,8
$R_m(m)$	114	70,3	50,3	43,3
$\theta_{0m}(^\circ)$	45,0	37,3	32,2	29,9

Pela Tabela 1, verifica-se que, para o MBP com RA, t_v é mais que o dobro de t_s , implicando que o tempo de queda é maior que o de subida. Este resultado é consequência do efeito do arrasto, que diminui H (em relação ao vácuo) e, por essa razão, durante a queda, o projétil não atinge os mesmos valores de velocidade para os mesmos níveis verticais da subida. Adicionalmente, pela Tabela 1, observa-se que $C2$ foi o que mais se aproximou de $C1$, enquanto $C4$ foi aquele que mais se afastou. Isso se explica pela maior área superficial da bola de futebol em relação à de gude, proporcionando maior efeito da RA e resultando em menor alcance.

Dadas as dificuldades para se determinar t_v , uma vez que se chega a uma equação transcendental, desenvolveram-se três métodos para a sua obtenção. Dois deles por expansão em série de Taylor, resultando em equações de segundo (boa aproximação) e quarto (excelente aproximação) graus. O terceiro consiste, somente, em multiplicar o tempo de subida pelo fator 2,2, produzindo um resultado aproximado para o alcance.

Referências

- [1] M. Rossini, M. Alves, L. Amarin e P. Filho. “Estudo da influência do ar no movimento de queda dos corpos: uma comparação entre a previsão teórica e os dados experimentais usando o Tracker”. Em: **Revista Brasileira de Ensino de Física** 42 (2020), pp. 1–11. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0290.
- [2] M. Silva, D. Valesan, K. Lira e G. Dalposso. “Modelagem Matemática: Movimento com Resistência do Ar Proporcional à Velocidade”. Em: **Revista Científica Semana Acadêmica** 137 (2018), pp. 1–17. ISSN: 2236-6717.