Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Torção Generalizada de Reticulados $\mathbb{Z}^n$ rotacionados

Fabiano Pinto Tavares[1]
DEMAT/IFMA, São Luís, MA
Ian Lucas Mendes Bezerra[2]
IFMA, São Luís, MA
Alessandro Mendes Costa [3]
IFMA, São Luís, MA

Dado um reticulado $\mathbb{Z}^n$, rotacionado, a partir deste, propomos através do conceito de torção generalizada, encontrar reticulados mais densos, preservando suas distâncias produtos mínimas normalizadas. Dessa forma, investigamos a construção de reticulados que sejam úteis simultaneamente a canais com desvanecimento do tipo Rayleigh e canais com ruído branco gaussiano.
As definições descritas nas igualdades (1), (2) e (3) a seguir, estão conforme as referências [1, 2, 5].
Um **reticulado** em $\mathbb{R}^n$, é dado por:

$$\Lambda = \{u_1\mathbf{b}_1 + u_2\mathbf{b}_2 + \cdots + u_m\mathbf{b}_m : u_i \in \mathbb{Z},\ \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \cdots, m\}. \tag{1}$$

Sendo μ e $V(\Lambda)$, a norma mínima e o volume do reticulado, a **densidade de empacotamento**, é dada por:

$$\Delta(\Lambda) = \frac{vol\mathcal{B}^n(\mu/2)}{V(\Lambda)}. \tag{2}$$

A **distância produto miníma normalizada**, é dada por:

$$d_{p,norm}(\Lambda) = \frac{1}{V(\Lambda)}.d_{p,min}(\Lambda) = \frac{1}{V(\Lambda)}.\min_{\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\Lambda}\prod_{i=1}^{n}|x_i|. \tag{3}$$

Utilizamos em nosso trabalho o reticulado $\mathbb{Z}^n$ rotacionado. Conforme [4], se $n = (p-1)/2$ (p primo), temos que sua matriz geradora é dada por

$$R = \frac{1}{\sqrt{p}}D\Sigma T, \tag{4}$$

em que D, Σ e T são matrizes quadradas de ordem n tais que $D = \text{diag}(\sqrt{2-2\cos(2\pi/p)}, ..., \sqrt{2-2\cos(2n\pi/p)})$, $\Sigma = [\sigma_{ij}]$, $\sigma_{ij} = 2\cos(ij\pi/n)$ e $T = [t_{ij}]$,

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i \geq j \\ 0, & \text{se} \quad i < j. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n)$ a versão rotacionada "ótima" do $\mathbb{Z}^n$. Segue que as distâncias produto mínimas normalizadas para as familias de reticulados $\text{tor}_{(\delta_1,\delta_2,\delta_3)}\left(\mathcal{R}\left(\mathbb{Z}^3\right)\right)$, $\text{tor}_{(\delta_1,\ldots,\delta_5)}\left(\mathcal{R}\left(\mathbb{Z}^5\right)\right)$, $\text{tor}_{(\delta_1,\ldots,\delta_8)}\left(\mathcal{R}\left(\mathbb{Z}^8\right)\right)$ e $\text{tor}_{(\delta_1,\ldots,\delta_{11})}\left(\mathcal{R}\left(\mathbb{Z}^{11}\right)\right)$, são respectivamente, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11^2}$, $\frac{1}{17^{7/2}}$, e $\frac{1}{23^5}$.

[1] fabiano.tavares@ifma.edu.br
[2] ianmendes@acad.ifma.edu.br
[3] alessandro.mendes@acad.ifma.edu.br

© 2025 SBMAC

Seja $\mathbb{Z}$ um reticulado com matriz geradora B. Uma **torção generalizada**[4] com parâmetros $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbb{R}$, é o reticulado $\mathrm{tor}_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(\Lambda)$ cuja matriz geradora, é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} \delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \end{bmatrix} B. \tag{5}$$

Para o cálculo da norma mínima do reticulado, implemetamos o algoritmo desenvolvido em [3]. Em nosso estudo, encontramos versões torcidas dos reticulados $\mathbb{Z}^n$ rotacionados com melhores densidades de empacotamento comparados com suas versões iniciais.

Tabela 1: Análise de $\mathbb{Z}^n$, suas versões torcidas.

$\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n)$	$\Delta(\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n))$	$\Lambda = \mathrm{tor}_\delta(\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n))$	$\Delta(\Lambda)$	Melhoria(%)
$n = 3$	0.523599	$\delta = (81, 146, 182)$	0.559634	6.9%
$n = 5$	0.164493	$\delta = (4, 8, 11, 13, 14)$	0.266544	62%
$n = 8$	0.015854	$\delta = (2, 4, 6, 7, 8, 10, 10, 10)$	0.048834	208%
$n = 11$	0.01012	$\delta = (1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)$	0.054331	437%

Tabela 2: Análise de $\mathbb{Z}^n$, suas versões torcidas e os reticulados mais densos nas respectivas dimensões.

$\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n)$	$\Delta(\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n))$	$\Lambda = \mathrm{tor}_\delta(\mathcal{R}(\mathbb{Z}^n))$	$\Delta(\Lambda)$	M	$\Delta(M)$
$n = 3$	0.523599	$\delta = (81, 146, 182)$	0.559634	FCC	0.74048
$n = 5$	0.164493	$\delta = (4, 8, 11, 13, 14)$	0.266544	D_5	0.46526
$n = 8$	0.015854	$\delta = (2, 4, 6, 7, 8, 10, 10, 10)$	0.048834	E_8	0.25367
$n = 11$	0.01012	$\delta = (1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)$	0.054331	P_{11a}	0.06624

Referências

[1] J. H. Conway e N. J. A. Sloane. **Sphere packings, lattices and groups**. Vol. 290. Springer Science & Business Media, 2013. ISBN: 978-1-4757-2018-1.

[2] S. I. R. Costa, F. Oggier, A. Campello, J-C Belfiore e E. Viterbo. **Lattices Applied to Coding for Reliable and Secure Communications**. Springer, 2017. ISBN: 978-3-319-67881-8.

[3] Ulrich Fincke e Michael Pohst. "Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis". Em: **Mathematics of computation** 44.170 (1985), pp. 463–471.

[4] F. Oggier e E. Viterbo. "Algebraic Number Theory and Code Design for Rayleigh Fading Channels". Em: **Foundations and Trends® in Communications and Information Theory** 1.3 (2004), pp. 333–415. ISSN: 1567-2190. DOI: 10.1561/0100000003. URL: http://dx.doi.org/10.1561/0100000003.

[5] F. P. Tavares. "Sobre Reticulados Rotacionados para Codificação em Sistemas de Transmissão. 2022. 133f". Tese de doutorado. Tese (Doutorado em Matemática)-Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2022.

[4] Neste estudo, estamos abordando uma nova definição para torção generalizada diferente da proposta em [5]. Da mesma forma, tal versão torcida, preserva a distância produto mínima normalizada do reticulado, ou seja, se Λ tem diversidade máxima, Λ e $\mathrm{tor}_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(\Lambda)$ têm as mesmas distâncias produtos mínimas normalizadas.

 © 2025 SBMAC