Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Estudo Das Propriedades Do Oscilador Harmônico Fracionário

Thiago M. Marchesin[1]
Licenciatura em Física, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru-SP
Rubens F. Camargo[2]
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru-SP

O Oscilador Harmônico Amortecido (OHA) é um modelo crucial em áreas como Física e Engenharia devido à sua capacidade de descrever fenômenos vibratórios. A equação diferencial que define o OHA exige um conhecimento específico em equações diferenciais ordinárias. Além disso, se for necessário um refinamento maior do modelo, a solução associada ao sistema se tornará mais extensa. Contudo, o uso da modelagem fracionária tem ganhado destaque na representação do OHA devido à sua simplicidade e elegância na abordagem desse problema [1–3].

Uma das formas de obter a equação diferencial associada a um Oscilador Harmônico, é por meio da modelagem do sistema massa-mola, usando a segunda Lei de Newton:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m}, \tag{1}$$

onde γ é o coeficiente de amortecimento, ω_0^2 é a frequência natural do sistema, f(t) é uma força externa e m é massa do objeto. Considerando f(t) $= 0$, $\omega_0 = 2\ s^{-1}$ e $m = 1\ kg$, podemos plotar o gráfico para diferentes valores de coeficiente de amortecimento:

Figura 1: Gráfico do Oscilador Harmônico Amortecido, para diferentes valores de γ.

Para obter a versão fracionária do Oscilador, partimos do Oscilador Harmônico simples, onde iremos trocar a derivada de ordem 2 para uma derivada de ordem α [1]:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\tau^{2-\alpha}}\right)\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{2}$$

[1]thiago.m.marchesin@unesp.br
[2]rubens.camargo@unesp.br

onde $x(t)$ é a função que descreve a posição do corpo ao longo do tempo, ω_0^2 é a frequência natural do sistema, $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ é a derivada de Caputo de ordem $\alpha \in \mathbb{C}|1 < \text{Re}(\alpha) \leq 2$, e $\tau^{2-\alpha}$ é o fator de correção dimensional da derivada fracionária [1]. Podemos resolver esse tipo de problema via transformada de Laplace, com as condições inciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$, logo, a solução é:

$$x(t) = x_0 E_\alpha[-\omega_0^2 t^\alpha \tau^{2-\alpha}] = x_0 E_\alpha[-(\omega_0 \tau)^2 (\tau^{-1} t)^\alpha], \tag{3}$$

onde $E_\alpha[\cdot]$ é a função de Mittag-Leffler de 1 parâmetro [1]. Podemos perceber que quando $\alpha = 2$:

$$x(t) = x_0 E_2[-(\omega_0 t)^2] = x_0 cos(\omega_0 t), \tag{4}$$

vamos recuperar a solução do Oscilador Harmônico simples. Plotando o gráfico para diferentes valores de α e, considerando $x_0 = 2$ m ,$\tau = 1$ s e $\omega_0 = 2$ s^{-1}, teremos:

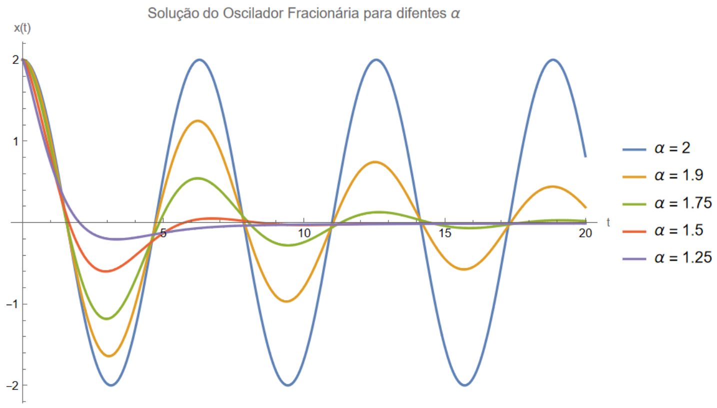

Figura 2: Gráfico do Oscilador Harmônico fracionário, para valores de $1 < \alpha \leq 2$.

Ao observar as Figuras 1 e 2, percebemos que o nível de amortecimento é inversamente proporcional ao valor de α. Isso indica que não é necessário introduzir um elemento adicional na equação para representar uma força externa ou de atrito. O Oscilador Harmônico fracionário (OHF) é um caso bem conhecido do uso do cálculo fracionário. No entanto, muitas de suas propriedades ainda não foram estudadas de forma aprofundada. Portanto, este trabalho visa analisar as propriedades do OHF utilizando métodos numéricos e analíticos. O objetivo é aprimorar o entendimento relacionado à modelagem fracionária.

Referências

[1] R. F. Camargo. "Cálculo fracionário e aplicações". Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, 2009. DOI: 10.47749/T/UNICAMP.2009.439359.

[2] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. **Cálculo Fracionário**. 1a. São Paulo: Livraria da Física, 2015. ISBN: 9788578613297.

[3] F. G. Rodrigues e E. C. de Oliveira. "Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática". Em: **Revista Brasileira de Ensino de Física** 37 (2015), pp. 3305–1.