Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Propriedades das Álgebras de Evolução Markovianas

José M. Toro[1], Pablo M. Rodriguez[2]
UFPE, Recife, PE

As álgebras de evolução surgiram há cerca de 16 anos, quando o autor J.P. Tian [4] propôs um caminho algébrico para representar a autorreprodução de alelos na genética não mendeliana. Esse tipo de álgebra faz parte das álgebras não associativas.

Definição 1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução, que admite uma base contável $B = \{\boldsymbol{e}_i \,|\, i \in \Lambda\}$, se:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j &= 0 \textit{ para todo } i \neq j, \\ \boldsymbol{e}_i^2 &= \sum_{k \in \Lambda} c_{ik} \boldsymbol{e}_k \textit{ para todo } i. \end{aligned} \tag{1}$$

Ressaltamos que as definições apresentadas anteriormente são definidas sob uma abordagem algébrica. Portanto, enfatizamos que as bases com as quais trabalhamos são bases de Hamel. Isso significa que, para todo elemento não nulo $\boldsymbol{v} \in \mathcal{A}$, existe uma representação única e finita de elementos da base $B = \{\boldsymbol{e}_i \,|\, i \in \Lambda\}$, com coeficientes em $\mathbb{R}$ diferentes de zero. Os escalares $c_{ik} \in \mathbb{R}$ na Equação (1) são chamados constantes de estrutura. Além disso, temos que, se $0 \leq c_{ik} \leq 1$ e $\sum_{k \in \Lambda} c_{ik} = 1$ para todo $i, k \in \Lambda$, então $\mathcal{A}$ é chamada de álgebra de evolução markoviana. Este nome é escolhido por causa das cadeias de Markov discretas (CMTD). Ou seja, existe uma relação entre a álgebra de evolução e uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, a qual definimos da seguinte forma: o espaço de estados da cadeia será $S = \Lambda$ e as probabilidades de transição são dadas por $c_{ik} := \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = i)$.

Com isso, temos que toda álgebra de evolução markoviana gera uma cadeia de Markov. A construção inversa é análoga, ou seja, tendo uma cadeia de Markov, as probabilidades de transição serão as constantes de estrutura e o espaço de estados será $S = \Lambda$. No entanto, nem toda cadeia de Markov gera uma álgebra de evolução.

Exemplo 1. *Consideremos $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \mathbb{Z}$ e probabilidades de transição dadas por:*

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \textit{se } j = i \pm 1, \textit{ com } i \neq= 0, \\ e^{-1}, & \textit{se } j = 0, \textit{ com } i = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-1}}{|j|!}, & \textit{se } j \neq 0, \textit{ com } i = 0. \end{cases} \tag{2}$$

O grafo associado à cadeia de Markov é o grafo na Figura 1.

[1] jose.jaramillo@ufpe.br
[2] pablo@de.ufpe.br

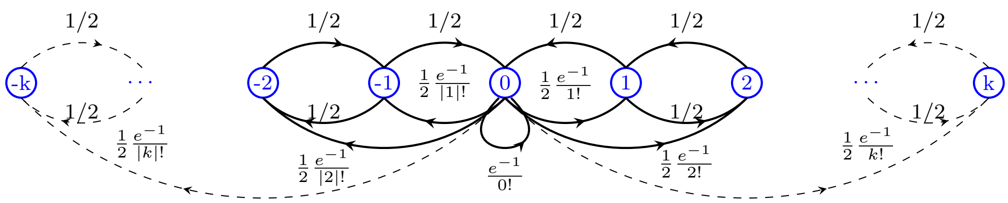

Figura 1: Grafo da cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ que não gera uma álgebra de evolução. Fonte: dos autores.

Portanto, da Equação (2)*, temos para o elemento* $\boldsymbol{e}_0^2$*:*

$$\boldsymbol{e}_0^2 = e^{-1}\boldsymbol{e}_0 + \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{2}\frac{e^{-1}}{|j|!}\boldsymbol{e}_j. \tag{3}$$

Quer dizer, $\boldsymbol{e}_0^2$ *na Equação* (3) *tem uma representação infinita de elementos da base, o que não pode ser considerado. Portanto, este é um exemplo de uma cadeia de Markov que não gera uma álgebra de evolução.*

O foco de nosso trabalho será apresentar quando uma cadeia de Markov homogênea de tempo discreto (CMTD) gera uma álgebra de evolução. Baseando-nos em [4], apresentaremos várias proposições e teoremas com uma abordagem probabilística das propriedades que as cadeias de Markov e as álgebras de evolução markovianas compartilham. Baseando-nos nos artigos [1–3], estudaremos propriedades algébricas das álgebras de evolução markovianas, que têm implicações importantes nas cadeias de Markov e em seus grafos associados.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao Programa de Pós-graduação em Estatística (PPGE) pela formação acadêmica e profissional proporcionada ao longo deste período e à FACEPE pelo auxílio financeiro. Este trabalho é parte da dissertação de mestrado de José Manuel Jaramillo Toro sob orientação do Prof. Pablo Rodriguez.

Referências

[1] P. Cadavid, M. L. Rodiño e P. Rodriguez. "On the isomorphisms between evolution algebras of graphs and random walks". Em: **Linear and Multilinear Algebra** 69.10 (2021), pp. 1858–1877. DOI: 10.1080/03081087.2019.1645807.

[2] P. Cadavid, M. L. Rodiño e P. Rodriguez. "The connection between evolution algebras, random walks and graphs". Em: **Linear and Multilinear Algebra** 19.02 (2020), p. 2050023. DOI: 10.1142/S0219498820500231.

[3] I. Paniello. "Markov evolution algebras". Em: **Linear and Multilinear Algebra** 70.19 (2022), pp. 4633–4653. DOI: 10.1080/03081087.2021.1893636.

[4] J. P. Tian. **Evolution Algebras and their Applications**. 1a. ed. Berlin: Springer Berlin, Heidelberg, 2007. ISBN: 978-3-540-74284-5.

