Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Dinâmica Metapopulacional Denso-Dependente

Samuel H. M. Rodrigues[1] Zochil G. Arenas[2]
PPG-CompMat, Instituto de Matemática e Estatística, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Do ponto de vista macroscópico, o fenômeno de difusão é um processo de transporte de matéria, fluido (gás ou líquido) ou energia. Esse transporte é caracterizado pela passagem de matéria de um local de maior concentração para outro de menor concentração. Neste trabalho, usamos o conceito de difusão para descrever uma dinâmica populacional. Usamos um modelo descrito por uma equação diferencial parcial de difusão-convecção-reação, onde supomos que além da dispersão de indivíduos pelo ambiente, também ocorre uma interação com ambientes externos e crescimento populacional.

Na Ecologia, faz-se uma clara separação entre os conceitos de população e comunidade. Enquanto população pode ser definida como um conjunto de seres da mesma espécie, comunidade é dita como um conjunto de populações. Nesse contexto, a **Teoria da Metapopulação** defende a ideia de que comunidades, ou "população de populações" [5], vivendo em pequenos locais isolados (refúgios) [3] ou em áreas fragmentadas separadas do **habitat** original [1], interagem entre si através da migração. Além disso, outros fatores que influenciam a dinâmica populacional desses indivíduos são a reprodução, competição por alimento e a predação.

Considerando que esses refúgios sofrem alterações ao longo do tempo, como pode ser o caso de ilhas cercadas pela água do mar, as quais acupam maior ou menor faixa de terra dependendo do estado da maré, e que a movimentação da população depende do espaço disponível para tal, apresentamos o seguinte modelo de convecção-difusão-reação (CDR)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x,K)\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t)\right) + r(t)\rho^u(x,t), \quad u = 1,\ 2. \tag{1}$$

com $(x,t) \in [-L,L]\times[0,+\infty)$. Os termos considerados na equação são a densidade populacional ρ, que relaciona o número de indivíduos no espaço x e tempo t; o coeficiente de difusão D, que caracteriza o espalhamento de indivíduos pelo meio; a capacidade suporte ou população limite K, que tem relação com quantidade de indivíduos que o meio comporta; e a taxa de crescimento/decrescimento populacional dada por r.

Para a análise do modelo, consideramos vários casos, com diferentes graus de complexidade. Inicialmente, consideramos a equação com D e r constantes, $D > 0$. Para a equação homogênea ($r = 0$) e a equação linear não homogênea ($r \neq 0$, $u = 1$), encontramos as soluções por meio do método da Transformada de Fourier. A solução nestes casos envolve um termo exponencial dependente de t, indicando que à medida que t tende ao infinito, a densidade populacional tende a zero. Nestas condições, a depender dos valores para L, r e D, $\rho(x,t)$ pode decrescer "mais ou menos" rápido a zero, porém essa tendência é mantida.

A forma mais geral da equação traz um problema matemático complexo, com uma liberdade muito grande na escolha de parâmetros e condições de integração. Neste caso, consideramos a difusão, a capacidade suporte e a taxa de crescimento da população como sendo as funções D, K e r, respectivamente. Em geral, vamos assumir que em ambientes de maior concentração de

[1]shrodrigues_mat@outlook.com
[2]zochil@ime.uerj.br

massa, a difusão é maior e que ela decresce rapidamente à medida que a função tende para os valores extremos de x. Dessa forma, a difusão pode ser escrita como $D(x, K) = D_0 e^{-aKx^2}$, onde $a > 0$ é a constante de decaimento e D_0 é um valor constante e positivo. A consideração de funções K e r positivas, limitadas e periódicas tem sido reportada na literatura no estudo de dinâmica populacional [2]. Assim, analisamos o caso em que K e r são funções subamortecidas na forma $K(t) = k_1 + k_2\text{sen}(1/t)$ e $r(t) = r_1 + r_2\text{sen}(1/t)$ e encontramos de forma analítica a solução estacionária da equação.

No caso geral, para além da solução estacionária, é necessário usar métodos numéricos para resolver a equação (1). Inicialmente, escolhemos o método de linearização explícito, também chamado de método de **tempo avançado, centrado no espaço** [4, 6] e foram realizadas algumas simulações usando a linguagem Python. Embora a solução encontrada corresponda a uma distribuição de indivíduos no espaço e no tempo, este é um trabalho em andamento para o qual ainda estamos definindo as condições e parâmetros da modelagem.

Considerando a natureza não linear da equação, há a necessidade de se analisar cuidadosamente a influência dos parâmetros no sistema e a estabilidade da solução numérica. No caso dos parâmetros das funções subamortecidas deve-se ter atenção para escolher funções K e r limitadas e, ainda, restringir a capacidade suporte K a valores não negativos, pelo próprio significado biológico que esse fator tem [2]. Para garantir a estabilidade da solução, desde o ponto de vista numérico, se faz importante a escolha do tamanho do passo na discretização das derivadas do espaço e do tempo [6]. Por outro lado, do ponto de vista físico da modelagem, a análise de estabilidade de Von Neumann será empregada, cuidando do fator de amplificação das componentes de Fourier a cada passo. Atualmente estamos concentrando esforços em encontrar a solução analítica (quando for possível) e/ou numérica destes casos mais complexos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] L. M. E. Assis, R. A. Assis e O. J. T. Fonseca. "Um estudo teórico de dinâmica entre fragmentos de habitat". Em: **Biomatemática** 30 (2018), pp. 55–92.

[2] B. D. Coleman, Y.-H. Hsieh e G. P. Knowles. "On the optimal choice of r for a population in a periodic environment". Em: **Mathematical Biosciences** 46.1-2 (1979), pp. 71–85. DOI: 10.1016/0025-5564(79)90015-4.

[3] E. H. Colombo e C. Anteneodo. "Nonlinear population dynamics in a bounded habitat". Em: **Journal of Theoretical Biology** 446 (2018), pp. 11–18. DOI: 10.1016/j.jtbi.2018.02.030.

[4] M. C. C. Cunha. **Métodos Numéricos**. 2ª ed. São Paulo: Editora Unicamp, 2010. ISBN: 978-8526808775.

[5] O. J. Marini-Filho e R. P. Martins. "Teoria de metapopulações, novos princípios na biologia da conservação". Em: **Ciência Hoje** 27.(n.160) (2000), pp. 22–29.

[6] J. C. Strikwerda. **Finite difference schemes and partial differential equations**. 2ª ed. Philadelphia: SIAM, 2004. ISBN: 0-89871-567-9.

