Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Número Mínimo de Autovalores Distintos de Grafos *Threshold*

Virgínia Pigatto Pereira[1] Luiz Emílio Allem[2]
PPGMAP/UFRGS, Porto Alegre, RS

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples com conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, \cdots, n\}$ e conjunto de arestas $E(G)$. Associamos a este grafo $G$ o conjunto $S(G)$ de matrizes simétricas $n \times n$ reais definidas por $A = (a_{ij})$ tal que para $i \neq j$, $a_{ij} \neq 0$ se, e somente se, $ij \in E(G)$. Para uma matriz quadrada $A$, temos que $\mathrm{DSpec}(A)$ denota o conjunto de autovalores distintos de $A$. Assim, para um grafo $G$, definimos o invariante espectral, $q(G)$ também chamado de *número mínimo de autovalores distintos do grafo $G$* como

$$q(G) = \min\{|\mathrm{DSpec}(A)| : A \in S(G)\}. \tag{1}$$

Nos últimos anos, tem havido um notável aumento no número de estudos realizados por pesquisadores sobre o parâmetro $q(G)$ para certas classes de grafos. Por exemplo, em [1], os autores investigaram $q(G)$ para grafos bipartidos, ciclos e outras famílias de grafos, contribuindo significativamente para a compreensão desse parâmetro. Os grafos para os quais $q(G)$ é pelo menos o número de vértices de $G$ menos um são caracterizado em [3]. Além disso, em uma abordagem mais recente, [5] exploraram este parâmetro para o *join* de dois grafos. Por fim, em [2], o problema de determinar os grafos regulares $G$ que satisfazem $q(G) = 2$ revelou novas perspectivas sobre as propriedades desses grafos. Esses estudos destacam a importância e a diversidade de aplicações do parâmetro $q(G)$ em diferentes contextos da teoria dos grafos.

Assim, nosso principal interesse reside em estudar o parâmetro $q(G)$ para grafos *threshold* conexos. Em [4], Fallat e Mojallal estudaram grafos *threshold*, mais especificamente, dado um grafo *threshold* $G$, eles estudaram a existência de uma matriz $M \in S(G)$ para certos valores de $q(G)$. Em nosso trabalho estamos interessados em efetivamente calcular os valores dessa matriz $M$.

Os grafos *threshold* podem ser caracterizados de várias maneiras. Uma forma de obter um grafo *threshold* é através de um processo iterativo que começa com um vértice isolado, e onde, a cada passo, ou um novo vértice isolado é adicionado, ou um vértice adjacente a todos os vértices anteriores (vértice dominante) é adicionado. Podemos representar um grafo *threshold* com $n$ vértices usando uma sequência binária $(b_1, \cdots, b_n)$. Aqui, $b_i$ é 0 se o vértice $v_i$ foi adicionado como um vértice isolado e $b_i$ é 1 se $v_i$ foi adicionado como um vértice dominante. Esta sequência binária também pode ser vista como blocos consecutivos de 0's e 1's representados por $0^{a_1}1^{a_2}0^{a_3}1^{a_4}\cdots b_r^{a_r}$ onde $a_i \geq 1$ para $1 \leq i \leq r$ e $b_r = 0$ se $r$ for ímpar e $b_r = 1$ se $r$ for par.

Com base nisso, o intuito principal deste trabalho consiste em construirmos um tipo específico de grafo *threshold* com pesos $G$ e representação binária $b = 0^{a_1}1^{a_2}0^{a_3}1^{a_4}\cdots b_r^{a_r}$ da seguinte maneira:

- cada vértice no bloco $b_i^{a_i}$ tem peso $p_i$ para $1 \leq i \leq r$;
- as arestas conectando os vértices no bloco $1^{a_i}$ tem peso $\epsilon_i$;

[1] virginiapigatto@gmail.com
[2] emilio.allem@ufrgs.br

 

- cada vértice no bloco $1^{a_j}$ é conectado aos vértices anteriores no bloco $b_i^{a_i}$ para $i < j$ por uma aresta com peso $\epsilon_{i,j}$.

Portanto, o grafo *threshold* com pesos definido acima é representado por uma matriz simétrica $M \in S(G)$. No próximo resultado conseguimos calcular o espectro de certos grafos *threshold* com pesos e sequência binária dada por $b = 0^{k_1}1^{t_1}0^{k_2}1^{t_2}$.

**Teorema 1.** *O grafo threshold $G$ com sequência binária dada por $b = 0^{k_1}1^{t_1}0^{k_2}1^{t_2}$ com $k_1$, $t_1$, $k_2$ e $t_2 \geq 1$ e pesos satisfazendo $\epsilon_{t_1,k_1} = \frac{\epsilon_{t_1}}{\sqrt{k_1}}$, $\epsilon_{t_2,k_1} = \frac{\epsilon_{t_2,t_1}}{\sqrt{k_1}}$, $p_{k_1} = p_{t_1}$, $p_{t_1} + t_1\epsilon_{t_1} = p_{k_2}$, $\epsilon_{t_1,t_2} = \frac{\epsilon_{t_2,k_2}}{\sqrt{t_1+1}}$, $p_{k_2} = p_{t_2}$ e $\epsilon_{t_2,k_2} = \frac{\epsilon_{t_2}}{\sqrt{k_2+1}}$ tem espectro dado por*

$$\left\{[p_{k_1}]^{k_1-1}; [p_{t_1} - \epsilon_{t_1}]^{t_1}; [p_{k_2}]^{k_2}; [p_{t_2} - \epsilon_{t_2}]^{t_2}; [p_{t_2} + t_2\epsilon_{t_2}]^1\right\}. \tag{2}$$

Em [4], Fallat e Mojallal mostraram que dado o grafo *threshold* $G$ com sequência binária $b = 010^k1$ existe uma matriz $M$ tal que $\mathrm{DSpec}(M) = 3$, isto é, $q(G) = 3$. No próximo corolário calculamos os pesos da matriz $M \in S(G)$ tal que $\mathrm{DSpec}(M) = 3$.

**Corolário 1.** *O grafo threshold $G$ com sequência binária dada por $b = 010^k1$ com $k \geq 1$ tem espectro dado por*

$$\left\{[p_{t_1} - \epsilon_{t_1}]^2; [p_{k_2}]^k; [p_{t_2} - \epsilon_{t_2}]^1\right\}. \tag{3}$$

*Onde $p_{t_1}$ e $p_{t_2}$ são variáveis livres e determinam os outros pesos da seguinte maneira: $\epsilon_{t_1} = p_{k_2} - p_{t_1}$, $\epsilon_{t_2} = 2p_{t_1} - 2p_{t_2}$, $\epsilon_{t_1,k_1} = p_{k_2} - p_{t_1}$, $\epsilon_{t_2,k_2} = \frac{2p_{t_1} - 2p_{t_2}}{\sqrt{k+1}}$, $\epsilon_{t_1,t_2} = \frac{2p_{t_1} - 2p_{t_2}}{\sqrt{2}\sqrt{k+1}}$, $p_{k_1} = p_{t_1}$ e $p_{k_2} = p_{t_2}$.*

Considerando as direções futuras, nosso objetivo é ampliar o alcance do Teorema 1 para englobar outras categorias de grafos *threshold*, isto é, pretendemos generalizar seu resultado para demais famílias de grafos *threshold*. Além disso, planejamos estender nossas investigações sobre o parâmetro $q(G)$, originalmente aplicado a grafos *threshold*, para o contexto dos cografos. Esses esforços visam aprofundar nossa compreensão teórica e explorar conexões mais abrangentes dentro da teoria dos grafos.

## Referências


[1] B. Ahmadi, F. Alinaghipour, M. Cavers, S. Fallat, K. Meagher e S. Nasserasr. "Minimum number of distinct eigenvalues of graphs". Em: **ELA. The Electronic Journal of Linear Algebra [electronic only]** 26 (abr. de 2013). DOI: 10.13001/1081-3810.1679.

[2] W. Barrett, S. Fallat, V. Furst, S. Nasserasr, B. Rooney e M. Tait. "Regular graphs of degree at most four that allow two distinct eigenvalues". Em: **Linear Algebra and its Applications** 679 (2023), pp. 127–164. ISSN: 0024-3795. DOI: https://doi.org/10.1016/j.laa.2023.09.012. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379523003488.

[3] W. Barrett, S. Fallat, H. T. Hall, L. Hogben, J. C-H Lin e B. L. Shader. "Generalizations of the Strong Arnold Property and the Minimum Number of Distinct Eigenvalues of a Graph". Em: **The Electronic Journal of Combinatorics** 24.2 (2017), pp. 2–40.

[4] S. Fallat e S. A. Mojallal. "On the minimum number of distinct eigenvalues of a threshold graph". Em: **Linear Algebra and its Applications** 642 (2022), pp. 1–29.

[5] R. H. Levene, P. Oblak e H. Šmigoc. "Orthogonal symmetric matrices and joins of graphs". Em: **Linear Algebra and its Applications** 652 (2022), pp. 213–238.


 