Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

A teoria de Lotka & Funções de Mittag-Leffler

Thaís S. Oliveira[1], Sandro R. Mazorche[2]
UFJF, Juiz de Fora, MG

O estudo das teorias demográficas e populacionais, potencializado pela Revolução Industrial do século XVIII, recebeu a contribuição de diversos pesquisadores, entre eles Thomas Robert Malthus, Pierre François Verhulst, Raymond Pearl e Alfred J. Lotka, [1, 2]. O modelo malthusiano é definido pela equação diferencial (1), a qual depende do tamanho N da população e apresenta o crescimento de uma população em um determinado instante t, de acordo com uma taxa de crescimento r. Este modelo não prevê um valor limitante no crescimento da população. O modelo Verhulst-Pearl, definido pela equação diferencial (2), considera que o crescimento atingirá um limite máximo e depende de uma taxa de crescimento r e da capacidade máxima N_∞ da população.

$$N'(t) = rN(t) \;\text{ e }\; N(0) = N_0 \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{rt}\,. \tag{1}$$

$$\begin{cases} N(t)' = rN\left(1 - \dfrac{N}{N_\infty}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \Rightarrow N(t) = \frac{N_\infty}{1 + \left(\dfrac{N_\infty}{N_0} - 1\right)e^{-rt}} = N_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right]^n e^{-rnt}. \tag{2}$$

Alfred J. Lotka propôs um modelo para calcular o tamanho de uma população, $N(t)$, baseado na equação integral (3), onde $B(t)$ é a quantidade de nascimentos de indivíduos num certo tempo t e $p(a, t)$, a probabilidade, no nascimento, de sobreviver até a idade a no tempo t. Lotka, nos trabalhos [1, 2], explora somente a dependência desta probabilidade em a, $p(a)$. Assim, na ausência de imigração e emigração, o tamanho da população, $N(t)$, é calculado pela integral dada por

$$N(t) = \int_0^\infty B(t - a)p(a)da. \tag{3}$$

Para obter o valor de $N(t)$ conhecendo as funções $B(t)$ e $p(a)$, o cálculo da integral é suficiente; porém, conhecendo apenas a função $N(t)$, encontrar as funções $B(t)$ e $p(a)$ não é simples. Lotka [2] mostrou que é possível reproduzir as soluções dos modelos clássicos de crescimento populacional conhecendo exclusivamente $N(t)$. Em [2], o autor apresenta a solução $N(t)$ de seu modelo como a equação do crescimento logístico, tomando determinadas funções para $B(t)$ e $p(a)$. Propomos um caminho diferente do feito em [1, 2]. Com o auxílio de uma Série Generalizada de Dirichilet, tomaremos $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-nrt}$, onde b_n são constantes reais. Para o caso da equação logística de Verhulst-Pearl, podemos determinar os valores de b_n usando (2) e (3).

$$N_1(t) = \int_0^\infty B(t - a)p(a)da = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n \int_0^\infty e^{arn} p(a)da]e^{-rnt} = N_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right]^n e^{-rnt} \tag{4}$$

$$\text{logo,} \quad b_n = N_\infty \frac{(-1)^n \left(\dfrac{N_\infty}{N_0} - 1\right)^n}{\displaystyle\int_0^\infty e^{rna} p(a)da}\,, \quad \text{para todo } \; n \geq 0. \tag{5}$$

Lotka [1] usava as "Tabelas da Vida"para estimar valores relativos a $p(a)$. Para o nosso caso, podemos lançar mão da função gaussiana, $p(a) = e^{-a^2}$, e assim determinar os b_n. Nosso objetivo principal é descrever um modelo, por meio da teoria de Lotka, em que $N(t)$ seja dada pelas funções de Mittag-Leffler, como a expressão da Série Generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler, dada em [3]. Em particular, as funções de Mittag-Leffler são uma generalização da exponencial para

[1]thais.souza@estudante.ufjf.br
[2]sandro.mazorche@ufjf.br

$0 < \alpha < 1$. Um dos problemas encontrados nesta abordagem provém do fato de que as funções de Mittag-Leffler não possuem as mesmas propriedades das funções exponenciais, dificultando o estudo de soluções analíticas por meio do modelo de Lotka, já que algumas manipulações algébricas propostas por Lotka [1, 2] não podem ser reproduzidas, pois se pode notar que

$$E_\alpha(-rnt^\alpha) \neq E_\alpha(-rt^\alpha)^n. \tag{6}$$

Ainda assim, é possível observarmos numericamente o comportamento do modelo de Lotka munido das funções de Mittag-Leffler e compará-lo ao comportamento do modelo na sua forma clássica. O modelo utilizando a Série Generalizada por Mittag-Leffler assemelha-se ao original e segue a proposta de um modelo de crescimento populacional considerando um limite máximo de crescimento, como visto nas equações abaixo e na Figura 1.

$$N_2(t) = N_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right]^n E_\alpha\left(-rnt^\alpha\right) \;\;,\;\; N_3(t) = N_\infty \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right]^n E_\alpha\left(-rt^\alpha\right)^n . \tag{7}$$

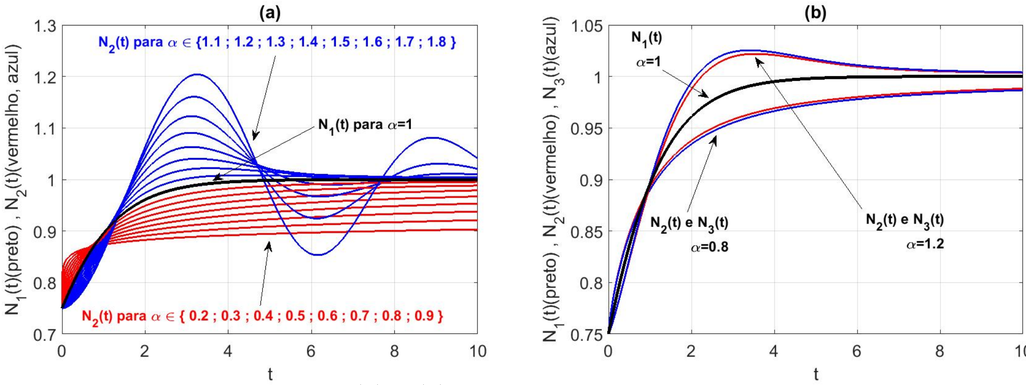

Figura 1: Soluções das equações (4) e (7), com $N_\infty = 1$, $N_0 = 0.75$ e $r = 1.05$. Fonte: dos autores

Como podemos notar, na Figura 1(a), para $\alpha < 1$ o comportamento se assemelha ao caso do modelo de Verhulst, porém, no início, $N_2(t)$ cresce mais rápido, em seguida, torna-se menor que o caso clássico e tende mais lentamente ao valor N_∞. Já para $\alpha > 1$, vemos que há inicialmente um crescimento menor que o clássico, mas logo o ultrapassa e excede o valor N_∞, ainda convergindo para N_∞. À medida que α cresce, o comportamento se torna oscilatório em torno de N_∞, o que é uma característica das funções de Mittag-Leffler para $1 < \alpha < 2$. Na Figura 1(b) podemos notar que, apesar da diferença vista na relação (6), as expressões em (7) ainda são próximas e têm comportamentos parecidos. Portanto, buscaremos expressões para $B(t)$ e $p(a,t)$, a fim de obter soluções baseadas nas funções de Mittag-Leffler por meio da equação (3).

Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da UFJF.

Referências

[1] A. J. Lotka. **Analytical Theory of Biological Populations**. Springer Science+Business Media. Plenum Press, New York, 1998. ISBN: 978-1-4757-9178-5.

[2] A. J. Lotka. "Biometric Functions in a Population Growing in Accordance With a Prescribed Law". Em: **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America** 10, Vol. 15 (1929), pp. 793–798. DOI: `https://doi.org/10.1073/pnas.15.10.793`.

[3] M. T. Mendonça e S. R. Mazorche. "Flutuações no Brilho da Via Láctea: Da Teoria de Ambartzumian ao Caso Fracionário". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2023. DOI: `10.5540/03.2023.010.01.0055`.

