Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Soluções Numéricas da Pressão Arterial no Vaso Sanguíneo

Thiago B. Ikeda[1] Gilcilene S. de Paulo[2]
FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

Neste trabalho, a distribuição da pressão arterial em um vaso sanguíneo unidimensional, em relação à variável temporal t, com pressão prescrita na extremidade inicial, foi obtida numericamente. A pressão foi modelada por meio de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem com valor inicial, resolvida pelos métodos de Euler Explícito (EE), de Taylor de 2ª ordem (T2) e Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4).

Para a modelagem deste problema, considere a princípio o ciclo cardíaco (ver [2], por exemplo). Mediante experimentos, foi observado que o fluxo de sangue sistêmico, $\mathcal{Q}_s$, é proporcional a pressão arterial e venosa $(\mathcal{P}_a(t) - \mathcal{P}_v(t))$ e dependente da resistência sistêmica $\mathcal{R}_s$. Como a pressão venosa é muito baixa, considera-se a seguinte modelagem:

$$\mathcal{Q}_s(t) = \frac{1}{\mathcal{R}_s}(\mathcal{P}_a(t) - \mathcal{P}_v(t)) = \frac{1}{\mathcal{R}_s}\mathcal{P}_a(t). \tag{1}$$

Ademais, experimentalmente, o volume arterial, $\mathcal{V}_a$, é proporcional à pressão arterial, cuja constante de proporcionalidade é denominada complacência, $\mathcal{C}_a$, a elasticidade do vaso:

$$\mathcal{V}_a(t) = \mathcal{C}_a \cdot \mathcal{P}_a(t). \tag{2}$$

A vazão de sangue arterial é dada pela diferença entre a quantidade de sangue que entra e sai pela aorta. Porém, a válvula aórtica está fechada, não há sangue entrando na aorta, então:

$$\frac{d\mathcal{V}_a(t)}{dt} = (\text{Quantidade que entra}) - (\text{Quantidade que sai}) = 0 - \mathcal{Q}_s(t). \tag{3}$$

Logo, substituindo a equação (1) em (3), obtém-se:

$$\frac{d\mathcal{V}_a(t)}{dt} = -\frac{1}{\mathcal{R}_s}\mathcal{P}_a(t). \tag{4}$$

Derivando a equação (2) e igualando a (4), obtém-se a seguinte modelagem pela EDO:

$$\frac{d\mathcal{P}_a(t)}{dt} = -\frac{1}{\mathcal{C}_a\mathcal{R}_s}\mathcal{P}_a(t), \quad t \in [0, T] \ , \tag{5}$$

com valor inicial $\mathcal{P}_a(0) = \mathcal{P}_{sys}$, T representa a duração de um batimento do coração, $\mathcal{P}_{sys}$ a pressão durante a sístole. Em resumo, o modelo descreve a pressão arterial durante um batimento, no instante que o sangue sai pelo ventrículo direito para a artéria pulmonar.

Este problema possui solução analítica dada por $\mathcal{P}_a(t) = \mathcal{P}_{sys}e^{-\frac{t}{\mathcal{C}_a\mathcal{R}_s}}, \quad t \in [0, T]$, que será utilizada na análise de convergência dos métodos numéricos adotados neste trabalho.

As soluções numéricas são exibidas na Figura 1, para as quais se considerou os dados de um adulto jovem saudável com $T = \frac{1}{70}$ (min), $\mathcal{P}_{sys} = 120$ $mmHg$, $\mathcal{C}_a = 0.002$ $mmHg$ e $\mathcal{R}_s = 17.6$ $(mmHg/L/min)$.

[1]t.ikeda@unesp.br
[2]gilcilene.sanchez@unesp.br

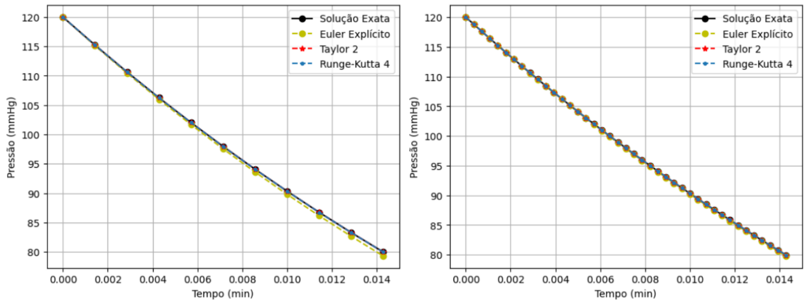

Figura 1: Comparações entre as soluções analítica e numéricas ($N = 10$ à esquerda e $N = 40$ à direita). Fonte: dos autores.

A análise de convergência foi realizada por meio do refinamento de malha e cálculo do erro relativo na norma$-l2$. O decaimento deste erro com o refinamento da malha pode ser visto na Figura 2, o qual indica a convergência de cada método numérico. Além disso, a Figura 2 também traz uma comparação entre as taxas de convergência dos métodos numéricos considerados, através da inclinação das retas formadas. Referente à ordem, q, de convergência de cada método, as inclinações das retas foram determinadas por $q \approx log_2(E(h_1)/E(h_2))$, e os resultados dispostos na Tabela 1.

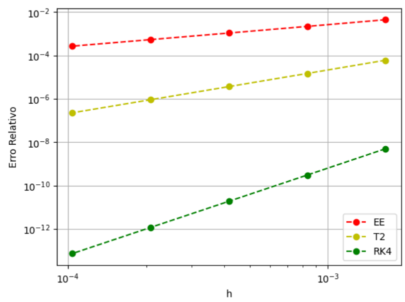

Figura 2: Erro relativo global na escala log-log. Fonte: dos autores.

Tabela 1: Ordem de convergência.

N	q_{EE}	q_{T2}	q_{RK4}
10	-	-	-
20	1.02581	2.02758	4.03001
40	1.01283	2.01378	4.01499
80	1.00640	2.00688	4.00728
160	1.00319	2.00344	4.00330

Os resultados da Tabela 1 são condizentes com a literatura [1], indicando que o método de Runge-Kutta alcançou de fato $O(h^4)$, seguido pelo método de Taylor com $O(h^2)$ e por último o método de Euler Explícito de $O(h)$. Quanto a interpretação dos resultados da modelagem, conclue-se de fato que, quando o coração está na fase da diástole, a pressão sanguínea é de aproximadamente 80 $mmHg$.

Agradecimentos

À FAPESP Proc. n^o 2023/00695-0 e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional (PosMAC) da UNESP.

Referências

[1] J. A. Cuminato e M. Meneguette Jr. **Discretização de Equações Diferencias Parciais: Técnica de Diferenças Finitas**. 1a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. ISBN: 9788583370055.

[2] R. J. Mahaffy. **Calculus for Life Science II. Lecture Notes - Linear Differential Equations**. Online. Acessado em 13/11/2023, `https://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f11/math122/beamer_lectures/lin_de.pdf`.