Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Trajetórias de um Bilhar Circular e Cáusticas

Pedro L. Q. Martins[1] Eber D. C. Vizarreta[2]
UABJ/UFRPE, Belo Jardim, PE

O jogo de bilhar sobre uma mesa retangular é amplamente conhecido e é um exemplo ilustrativo em que se pode usar a matemática para modelar tal sistema com o intuito de compreender e prever as trajetórias da bola branca, mesmo que sejam difíceis de executar na prática. Uma modelagem é feita considerando a bola branca como uma partícula pontual que se movimenta, sem atrito, em linhas retas com velocidade constante até colidir com a borda da mesa. Em cada colisão com uma aresta, se considera que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão (reflexão especular) e, também, que o módulo da velocidade da partícula será invariante (colisão elástica). Além disso, assume-se que o movimento da partícula finaliza quando ela bate em algum dos vértices da mesa.

Essa modelagem, motivada por modelos físicos na mecânica e ótica, é estendida para o caso onde uma ou mais partículas se movimentam livremente em um domínio limitado do espaço, experimentando colisões com a fronteira e com as outras partículas. Exemplos clássicos de bilhares que descrevem a dinâmica de uma única partícula livre, incluem o bilhar circular, triangular, retangular, elíptico, em forma de estádio e em forma de cogumelo. De modo geral, a dinâmica dos bilhares planos é determinada pela forma geométrica do domínio e podem exibir os diversos comportamentos dos sistemas dinâmicos: integrável, caótico ou misto [2]. O trabalho objetiva introduzir o conceito de *cáustica* no contexto de bilhares no plano.

A dinâmica da partícula sobre a região interna do bilhar $D \subset \mathbb{R}^2$, em termos da posição $q = q(t)$ e seu vetor velocidade de módulo unitário $v = v(t)$ como funções do tempo t, é descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{q} = v \quad \text{e} \quad \dot{v} = 0. \tag{1}$$

Após a colisão da partícula com algum ponto q do bordo ∂D, o vetor velocidade refletido v_r através da tangente à ∂D em q é

$$v_r = v - 2\langle v, n\rangle\, n, \tag{2}$$

onde n é o vetor normal unitário interior à ∂D em q. Tal descrição é uma modelagem contínua da dinâmica em um bilhar plano. Tendo como base o bilhar circular e a referência [1], iremos exibir que é possível simplificar o estudo da dinâmica de um bilhar plano ao estudo de um sistema discreto associado, mediante o chamado *mapa de colisão*.

Consideremos $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Logo, sua fronteira ∂D é $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ e, portanto, parametrizada pelo parâmetro angular (comprimento de arco) $\theta \in [0, 2\pi]$ medido, no sentido anti-horário, a partir do eixo positivo x. Uma colisão no bilhar circular é representada pelo par ordenado (θ, ψ), onde $\psi \in [0, \pi]$ é o ângulo de reflexão. Se (θ_n, ψ_n) representam os parâmetros da n-ésima colisão, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} \theta_n &= \theta_1 + 2(n-1)\psi_1 \pmod{2\pi} \\ \psi_n &= \psi_1 \end{aligned} \tag{3}$$

[1]pedro.luizm@ufrpe.br
[2]eber.vizarreta@ufrpe.br

O movimento da partícula de colisão em colisão determina o mapa de colisão $\mathcal{T} : M \to M$, definida por (3), onde $M = \{(\theta, \psi) : \theta \in [0, 2\pi]\,, \psi \in [0, \pi]\}$ é o espaço de todas as colisões no bilhar circular D. A restrição do mapa de colisão $\mathcal{T}$ em cada circunferência $C_\psi = \{(\theta, \psi) : \psi = \text{constante}\}$ é uma rotação de C_ψ por um ângulo 2ψ.

Teorema 1. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(a) Se $\psi < \pi$ é tal que $\psi/\pi = m/n$, para alguns $m, n \in \mathbb{Z}$, então a rotação, por um ângulo 2ψ, da circunferência C_ψ é periódica com período mínimo n; isto é, n é o menor inteiro tal que $\mathcal{T}^n(\theta, \psi) = (\theta, \psi)$.

(b) Se ψ/π é irracional, então, para todo ponto $(\theta, \psi) \in C_\psi$, o conjunto $\{\mathcal{T}^n(\theta, \psi) : n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em C_ψ.

A afirmação (a) do Teorema 1 indica que a partícula descreve uma trajetória periódica quando o ângulo de incidência ψ for um múltiplo racional de π. Veja a Figura 1.

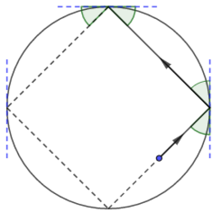

Figura 1: Trajetória de período 4 correspondente a $\psi = \frac{\pi}{4}$. Fonte: Autores.

Além disso, todo segmento da trajetória da partícula entre colisões consecutivas é tangente à circunferência $S_\psi = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \cos^2 \psi\}$. Tal circunferência concêntrica S_ψ é um exemplo de uma cáustica do bilhar circular D. Veja Figura 2.

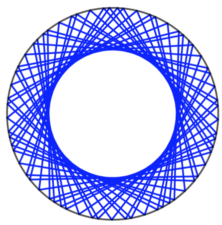

Figura 2: Trajetória correspondente a $\psi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Fonte: Autores.

Finalmente, para um bilhar plano D dado, uma curva Γ é *cáustica* de D se satisfaz a seguinte condição: se um segmento da trajetória for tangente a Γ, então qualquer outro segmento da trajetória é tangente a Γ.

Referências

[1] N. Chernov e R. Markarian. **Chaotic Billiards**. 1a. ed. Rhode Island: American Mathematical Society, 2006. ISBN: 0-8218-4096-7.

[2] A. Saa e R. de Sá Teles. **Bilhares: Aspectos Físicos e Matemáticos**. Publicações Matemáticas. IMPA, 2013. ISBN: 978-85-244-0352-1.

