Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Uma Proposta de Integração para Funções de Valores Fuzzy

Estevão E. Laureano[1] Francisco S. S. Junior[2]
UNICAMP, Campinas, SP
Geizane L. da Silva[3]
UESC, Ilhéus, BA

Desde o desenvolvimento da teoria fuzzy, várias definições de integral de funções fuzzy surgiram (integral de Riemann, de Aumann, de Lebesgue, entre outras), levando em conta características da função. A integral fuzzy é essencial na modelagem de fenômenos em biomatemática, como no conceito de valor esperado fuzzy, em sistemas dinâmicos fuzzy, etc. Neste trabalho, apresentaremos resultados iniciais de uma pesquisa que busca definir a integração de funções com valores fuzzy, a partir dos resultados encontrados em [3]. Vamos começar com algumas definições importantes.

**Definição 0.1.** *Um conjunto fuzzy $A$, subconjunto de $X$, é definido pela função de pertinência*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1],$$

*onde $\mu_A(x)$ indica o grau de pertinência de $x$ em relação ao conjunto $A$.*

**Definição 0.2.** *Dado $A$ um subconjunto fuzzy de $X$. O conjunto $\alpha$-nível de $A$ é definido pelo conjunto:*

$$[A]^\alpha = [a^-_\alpha, a^+_\alpha] = \{x \in X; A(x) \geq \alpha\}, \forall \alpha \in (0, 1].$$

Mais sobre função de pertinência e conjuntos de nível pode ser visto em [1]. Agora, considere que os símbolos $\vee$ e $\wedge$ se referem ao máximo e o mínimo, respectivamente, do conjunto indicado.

**Definição 0.3.** *Dados $A_1, A_2, \dots, A_n \in R_f$ (funções de valores fuzzy reais), $J$ uma distribuição de possibilidade conjunta entre eles ([2]) e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a extensão Sup-J de $f$ é dada por*

$$f_J(A_1, A_2, \dots, A_n)(y) = \begin{cases} \vee_{s \in f^{-1}(y)} Sup J(x_1, x_2, \dots, x_n), & se \quad s \in f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & se \quad f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

*onde $f^{-1}(y) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots X_n / f(x_1, \dots, x_n) = y\}$ e $s = (x_1, \dots, x_n)$.*

**Definição 0.4.** *Sejam $A, B \in R_f$ e $J$ uma distribuição de possibilidade conjunta entre $A$ e $B$,*

$$(A +_J B)(z) = \vee_{x+y} J(x, y)$$

*é chamada de soma interativa entre $A$ e $B$ e neste caso, $f(x, y) = x + y$ e $+_J$ é a soma interativa baseada no princípio de extensão Sup-J de $f$.*

A partir destas definições, a Geizane [3] apresenta um teorema que nos dá a caracterização dos $\alpha$-níveis de uma soma parametrizada de $k$ números fuzzy, para $k \geq 2$. O teorema afirma que

$$[A_1 + \gamma A_2 + \dots + \gamma A_n]^\alpha = [\wedge_{i=1}^n S_i^-(\alpha, \gamma), \vee_{i=1}^n S_i^+(\alpha, \gamma)], \tag{1}$$

[1] eelaureano@gmail.com
[2] f235783@dac.unicamp.br
[3] glsilva@uesc.br

 

$$S_i^-(\alpha,\gamma) = \wedge_{\beta\in[\alpha,1]}(min\{(\sum_{j=1}^{n}\overline{a_j}) + \gamma(\sum_{j=1}^{n} a_{j\beta}^- - \overline{a_j}), a_{i\beta}^- + (\sum_{j\neq i} a_{j\beta}^+) + \gamma(\sum_{j\neq i} a_{j\beta}^- - a_{j\beta}^+)\}) \quad (2)$$

$$S_i^+(\alpha,\gamma) = \vee_{\beta\in[\alpha,1]}(max\{(\sum_{j=1}^{n}\overline{a_j}) + \gamma(\sum_{j=1}^{n} a_{j\beta}^+ - \overline{a_j}), a_{i\beta}^+ + (\sum_{j\neq i} a_{j\beta}^-) + \gamma(\sum_{j\neq i} a_{j\beta}^+ - a_{j\beta}^-)\}). \quad (3)$$

onde

$$[A_i]^\alpha = [a_{i\alpha}^-, a_{i\alpha}^+] \text{ e } \overline{a_i} = \frac{a_{i1}^- + a_{i1}^+}{2}, \alpha \in [0,1].$$

Considere, então, a função fuzzy $f(x) = B$, onde $B = (2,3,5)$. O $\alpha$-nível de $B$ é dado pelo intervalo $[2+\alpha, 5-2\alpha]$, onde $\alpha \in [0,1]$. Logo, para $\alpha \in [0,1]$ e $\Delta i \geq 0$:

$$[A_i]^\alpha = [\Delta i B]^\alpha = \Delta i[2+\alpha, 5-2\alpha] \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}[A_i]^\alpha = \sum_{i=1}^{n}[\Delta i B]^\alpha = \sum_{i=1}^{n}\Delta i[2+\alpha, 5-2\alpha].$$

Tomando uma partição em $[a,b]$, tal que $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ e $\Delta i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1,...,n$:

$$[\int_a^b Bdt]^\alpha = [\int_a^b (2+\alpha)dt, \int_a^b (5-2\alpha)dt] = [(2+\alpha)(b-a), (5-2\alpha)(b-a)]. \quad (4)$$

Por outro lado, a partir de (1), (2) e (3), como $\overline{a_i} = 3$, $a_{i\beta}^- = 2+\beta$ e $a_{i\beta}^+ = 5-2\beta$, e $\beta \in [\alpha,1]$:

$$S_i^-(\alpha,\gamma) = \wedge_{\beta\in[\alpha,1]}\sum_{i=1}^{n}\Delta i(3+\gamma(\alpha-1)) \text{ e } S_i^+(\alpha,\gamma) = \vee_{\beta\in[\alpha,1]}\sum_{i=1}^{n}\Delta i(3+2\gamma-2\alpha\gamma), \gamma\in[0,1].$$

Para $\gamma = 1$, temos $S_i^-(\alpha,1) = \sum_{i=1}^{n}\Delta i(2+\alpha)$ e $S_i^+(\alpha,1) = \sum_{i=1}^{n}\Delta i(5-2\alpha)$. Tomando $n\to\infty$ e realizando a integração de $a$ a $b$ obtemos a equação (4), como deveríamos.

De modo inteiramente análogo, se considerarmos $\gamma = 0$, teremos

$$S_i^-(\alpha,0) = \wedge_{\beta\in[\alpha,1]}\sum_{i=1}^{n}3\Delta i \text{ e } S_i^+(\alpha,0) = \vee_{\beta\in[\alpha,1]}\sum_{i=1}^{n}3\Delta i \Longrightarrow [\int_a^b Bdt]^\alpha = 3(b-a).$$

Para $\gamma = 0,5$, segue que $S_i^-(\alpha;0,5) = \sum_{i=1}^{n}\Delta i(2,5+0,5\alpha)$ e $S_i^+(\alpha;0,5) = \sum_{i=1}^{n}\Delta i(4-\alpha)$

$$\Longrightarrow [\int_a^b Bdt]^\alpha = [2,5+0,5\alpha, 4-\alpha](b-a).$$

Portanto, pelos exemplos anteriores, parece ser possível realizar a integração de funções de valores fuzzy considerando os conjuntos $\alpha$-nível da função, a partir dos resultados da Geizane [3]. Assim, nosso projeto tem como objetivo ampliar a definição de integral vista nos resultados prelimiares acima, para funções fuzzy contínuas não constantes e, possivelmente, estender a mesma definição a funções de medidas mais gerais.

# Referências


[1] L. C. Barros e R. C. Bassanezi. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. 3a. ed. Campinas: IMECC - UNICAMP, 2021. ISBN: 9788587185174.

[2] B. Bede. **Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic**. 1a. ed. Berlin Heidelberg: Springer, 2013. ISBN: 9783642352201.

[3] G. L. Da Silva. "Somatório de números fuzzy interativos com aplicações em ajuste de curvas". Tese de doutorado. IMECC/UNICAMP, 2019.


 