Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Explorando o Problema da Moeda de Frobenius: Uma Proposta de Atividade para Alunos do Ensino Médio

Letianne Alves[1]
UFJF, Juiz de Fora, MG e Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco, Olinda, PE
Beatriz Motta[2]
UFJF, Juiz de Fora, MG

Certo país só tem dois valores de moedas, 2 e 15, que são as únicas formas possíveis de se comprar qualquer item nesse lugar. Para montar um time de RPG nesse país, alguns amigos se uniram para comprar os materiais necessários para o jogo e, pelo fato de não existir a ideia de troco (devolução de um dinheiro a mais que se é pago por um produto ou serviço), os amigos perceberam duas situações. A primeira é que eles não conseguiriam fazer uma compra de qualquer valor para esse jogo. Por exemplo, se o orçamento desse jogo fosse de 9, eles não teriam como pagar, já que para isso, a moeda de 15 seria muito (geraria troco) e a de 2 insuficiente (mesmo que usada mais de uma). Com isso, chegaram na segunda questão: qual seria então, o maior valor para esse jogo que não pode ser pago com essas moedas?

Essa situação é um caso do conhecido problema da moeda de Frobenius, que pergunta qual é o maior valor inteiro que não pode ser obtido usando apenas moedas de valores fixados sem utilizar troco. Esse problema aparentemente simples era apresentado por Frobenius (1849–1917) em palestras no século XIX, mas sua solução (ou falta dela) tem desdobramentos até os dias atuais. Para dois valores de moedas, a solução é conhecida. Sejam m, n esses valores, o teorema de Sylvester (ver Teorema 1 de [1]) nos garante que: se m, n são inteiros positivos, com $mdc(m, n) = 1$, então a solução para o problema de Frobenius com valores m, n é dada por $mn - (m + n)$. Voltando ao exemplo do nosso país, o maior valor que não pode ser pago é $15.2 - 2 - 15 = 13$. Agora, para mais de dois valores, não existe solução com fórmula fechada.

Esse problema é a base de um conceito da Teoria dos Números chamado "Semigrupos Numéricos". Um semigrupo numérico S é um subconjunto dos naturais contendo o 0, que satisfaz duas simples características, são elas: ser fechado para a adição e ter complementar em $\mathbb{N}$ finito. Dado um semigrupo numérico S, existem alguns invariantes interessantes de conhecermos. O primeiro invariante a ser definido é o conjunto de lacunas. O conjunto de lacunas de um semigrupo numérico, denotado usualmente por $G(S)$, é justamente o seu complementar finito que acabamos de ressaltar. No exemplo do nosso país, temos que 9 está nesse conjunto, ou seja, $9 \in G(S)$. A cardinalidade do conjunto de lacunas é nomeado de gênero e representado por $g(S)$ ou apenas g. A partir do momento que olhamos para o semigrupo numérico, temos que o menor elemento não nulo é denotado por $m(S)$, enquanto o condutor (c) é o menor elemento que a partir dele todos os seus consecutivos estarão em S. Por fim, ressaltamos também a existência do que chamamos de número de Frobenius. Esse número é conhecido por ser $c - 1$, representado por $F(S)$, ele é também o maior elemento do conjunto de lacunas. Ou seja, aquilo que procuramos responder no nosso problema nada mais é do que encontrar o número de Frobenius para um semigrupo numérico gerado pelos elementos 2 e 15. Ainda sobre a situação do nosso país, temos então que: $S = \mathbb{N} \setminus G = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, ...\}$, com o conjunto de lacunas dado por

[1]letiannea@gmail.com
[2]beatriz@ice.ufjf.br

$G(S) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, seu gênero g é igual a 7; a multiplicidade de S é $m = 2$ e o condutor $c = 14$. Já o número de Frobenius $F(S)$ é 13. Para ver mais detalhes dessas e de outras definições relacionadas a semigrupos numéricos é interessante consultar [2].

Nossa proposta nesse trabalho é apresentar uma sugestão de intervenção em sala de aula com alunos de ensino médio, como em [3], para explorar o problema da moeda de Frobenius, concluindo que a Matemática não está terminada e que, mesmo problemas com caráter recreativo, são importantes na construção dessa ciência. Para tal, propomos uma atividade para trabalhar em sala de aula do Ensino Médio, em que os alunos devem ser provocados a trabalhar com o problema da moeda de Frobenius a partir da exploração das moedas fictícias de valores 2 e de 15 unidades. A seguir, descrevemos o funcionamento da atividade, que foi aplicada em uma escola da rede estadual em 2024 na disciplina de Jogos Matemáticos.

Para começar, a turma foi dividida em grupos de 4 integrantes. Cada grupo recebeu 5 moedas de valor 2 e 5 moedas de valor 15. Os estudantes foram desafiados a descobrir todos os valores que podem ser obtidos utilizando $2, 3$ ou 4 dessas moedas. Após esse primeiro momento, cada grupo registrou quais são todos os valores que podem ser obtidos usando as moedas disponíveis. As respostas foram organizadas em uma tabela.

Posteriormente, tendo percebido que nem todos os valores podem ser obtidos com essas moedas, os alunos foram provocados com as seguintes perguntas:

- Quais são todos os valores impossíveis menores que 85?
- Quantas moedas eles precisariam ter a mais para obter o valor 86?
- Quantas moedas precisariam ter para obter o valor 100?
- Será que todos os números maiores que 85 poderiam ser obtidos com mais moedas dos mesmos valores?

Depois de terem explorado diversas possibilidades de combinações e terem discutido suas abordagens, os alunos foram novamente desafiados. Alteramos um pouco a configuração inicial introduzindo uma nova moeda com valor diferente ($2, 7$ e 15, nesse caso), ampliando a complexidade do problema e os estimulando a adaptarem suas estratégias para lidar com essas alterações. É interessante ressaltar que quanto mais diversificado for essa última alteração, maior será a complexidade da nova situação que o grupo será exposto.

Para encerrar esses desafios, foi apresentado o conceito de semigrupo numérico, falando sobre sua aplicação em criptografia e em outras áreas de teoria dos números afim da divulgação do tema e formalização da matemática por trás da atividade apresentada a eles.

Referências

[1] R. Garcia. “Semigrupos Numéricos e o Teorema de Sylvester”. Em: **Revista da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás** 8 (2013), pp. 47–68.

[2] P.A. García-Sánchez e J.C. Rosales. **Numerical semigroups**. Developments in Mathematics. Springer, 2009. ISBN: 978-1441901590.

[3] A. L. F. Rodrigues. “Semigrupos numéricos com multiplicidade fixada e proposta de atividade para o ensino médio com utilização do GeoGebra”. Dissertação de mestrado. PROFMAT/UNB, 2020.

