Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Estudo Comparativo de Soluções Numéricas para a Equação Diferencial Ordinária do Pêndulo Simples

Gabriel Almeida Lima[1], João Pedro Fernandes de Aquino[2], Rusemildo Alves dos Santos[3], Ivan Mezzomo[4], Paulo César Linhares da Silva[5], Thamyrys Marques Azevedo[6], Abdiel Jônatas Alves da Silva[7]

DCME/UFERSA, Mossoró, RN

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) são equações que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas uma variável independente e possuem inúmeras aplicações, dentre elas, descrever o movimento de um pêndulo simples. De acordo com [1], um pêndulo simples pode ser definido como qualquer objeto pendurado em movimento pendular, com comprimento (L), aceleração da gravidade (g), ângulo (θ) e tempo(t). O pêndulo simples pode ser modelado a partir de uma EDO de segunda ordem, dada por $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen(\theta) = 0$. Utilizado a aproximação $sen(\theta) \approx \theta$, temos que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \tag{1}$$

Este estudo tem como objetivo realizar a análise numérica do desempenho entre o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método de Heun (MH), através da variação do tamanho do passo h, de um Problema de Valor Inicial (PVI) que descreve o comportamento de um pêndulo simples.

A resolução das EDOs de forma analítica podem não ser algo fácil e uma forma de solucionar este problema pode ser através do MDF. Este método numérico utiliza da série de Taylor para o cálculo aproximado das derivadas a partir de valores numéricos da equação, a fim de discretizar o domínio e utilizar a substituição das derivadas na EDO. A partir do MDF podemos estabeler o cálculo aproximado da derivada de segunda ordem da função θ(t), com a seguinte discretização:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx \frac{\theta(t+h) - 2\theta(t) + \theta(t-h)}{h^2} \tag{2}$$

O MH, por sua vez, é construído a partir da uma melhoria do método de Euler, utilizado para encontrar a solução de EDOs de primeira ordem. Segundo [2], nesse método são determinados duas derivadas, uma no ponto inicial e outra no final do intervalo e calculada a média desses pontos, a fim de obter uma melhor estimativa para o intervalo. As equações do MH são dadas por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right), \tag{3}$$

onde $k_1 = f(x_i, y_i)$ e $k_2 = f\left(x_i + h, y_i + h \cdot k_1\right)$ são, respectivamente, a derivada no ponto inicial e no ponto final, de acordo com o cálculo da segunda estimativa. Para uma EDO de segunda ordem, o MH trata como um sistema de duas EDO's de primeira ordem e aplica o método em cada uma das equações do sistema.

Problema: Dado um pêndulo simples, cujo fio tem comprimento de 2 m, quando t=0 a velocidade angular é de 3 m/s e há um deslocamento de $\pi/4$ rad. A EDO para este problema, de acordo

[1]gabriel.lima66961@alunos.ufersa.edu.br
[2]joao.aquino03085@alunos.ufersa.edu.br
[3]rusemildo.santos@alunos.ufersa.edu.br
[4]imezzomo@ufersa.edu.br
[5]linhares@ufersa.edu.br
[6]thamyrys.azevedo@alunos.ufersa.edu.br
[7]abdiel.silva@alunos.ufersa.edu.br

com a Eq. 1, é dado por $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{9,81}{2}(\theta) = 0$, e as condições iniciais são $\theta'(0) = 3\ m/s$; $\theta(0) = \pi/4$ rad.

Visando analisar e comparar os métodos propostos, as implementações foram efetuadas em linguagem de programação Python versão 3.11.5, em uma máquina com processador Intel Core i5 11a Geração, 16GB RAM e Sistema Operacional Linux Ubuntu 20.04.6 LTS de 64 bits.

A Tabela 1 tem o propósito de mostrar os resultados da média aritmética dos erros relativo calculados com base na variação do tamanho do passo h.

Tabela 1: Resultado dos experimentos realizado

h	Erro (MH)	Erro (MDF)
0.1	0.050696	0.08083
0.01	7.6793×10^{-4}	0.01201
0.001	7.95222×10^{-6}	0.12413×10^{-2}
0.0001	9.21792×10^{-8}	0.14067×10^{-3}
0.00001	1.13462×10^{-9}	1.68028×10^{-5}

Os gráficos abaixo representam a comparação dos MDF e MH para os tamanhos de passo $h = 0.1$ e $h = 0.01$.

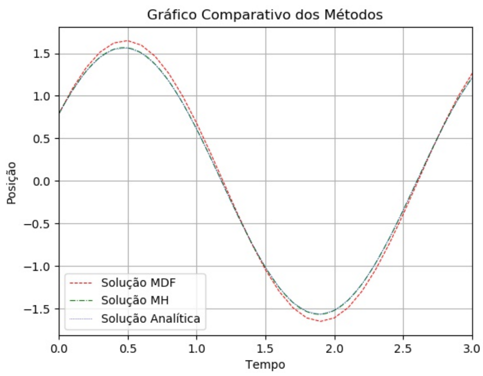

Figura 1: Gráfico comparativo para $h = 0.1$.
Fonte: Autoria Própria.

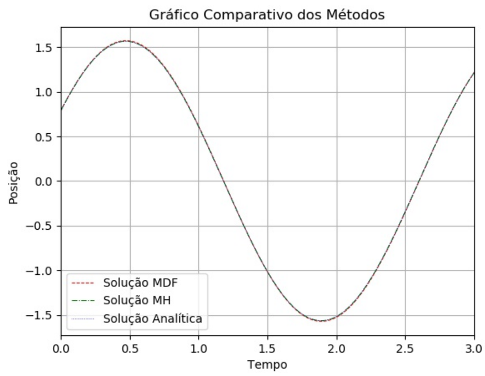

Figura 2: Gráfico comparativo para $h = 0.01$.
Fonte: Autoria Própria.

Ao analisar a tabela e os gráficos acima, observamos que os métodos se mostram eficientes para a solução da EDO. Podemos notar que os resultados do MH em comparação com MDF apresentam maior eficiência em todos os tamanhos de h. Como já era esperado, a medida que o tamanho do h diminui, o erro também diminui, como pode ser visto nas Figuras 1 e 2.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

[1] D. G. Zill e M. R. Cullen. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2001. ISBN: 9788534612913.

[2] S. C. Chapra e R. P. Canale. **Numerical Methods for Engineers**. 7. ed. Nova York: McGraw-Hill Education, 2013.