Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Diagrama de Voronoi e Eixo Medial
CNMAC 2014

Eneas Mendes de Jesus
Bolsista do Programa de Educação Tutorial FNDE, PETMAT-UFES
E-mail: neo.mdj@gmail.com

Fabiano Petronetto do Carmo
Departamento de Matemática - Universidade Federal do Espirito Santo
E-mail: fabiano.carmo@ufes.br.

RESUMO

O eixo medial é um conceito geométrico que corresponde aos pontos localmente simétricos de uma figura e é baseado em objetos contínuos e curvas fechadas simples, ao passo que o diagrama de Voronoi é obtido a partir de um conjunto de pontos discretos. Neste trabalho, definiremos tais conceitos geométricos de tal forma a evitar a inconsistência contínuo-discreto dada a partir das definições clássicas destes conceitos, podendo então obter o eixo medial a partir do diagrama de Voronoi para uma gama de objetos discretos incluindo aproximações de curvas com auto-interseção e curvas abertas.

Diagrama de Voronoi é um conceito geométrico baseado na distância a pontos de um dado conjunto discreto. Seja $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos no $\mathbb{R}^n$. O *Diagrama de Voronoi* de P, denotado por $\mathcal{DV}(P)$, é a subdivisão do plano em regiões, onde cada região, chamada *Região de Voronoi* e denotada por $\mathcal{RV}(p_i)$, consiste de todos os pontos que estão, pelo menos, mais próximo a p_i que qualquer outro ponto de P. Tem-se $\mathcal{RV}(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,p_i) \leq d(x,p_j), \forall\, p_j \in P \text{ com } j \neq i\}$.

Esta definição de diagrama de Voronoi não é aplicável a objetos contínuos (Figura 1). Na ilustração superior, o site[1] e_2 é um segmento de reta (contínuo), enquanto na inferior, o segmento é dado por um conjunto infinito de pontos e_t. Observe que as figuras tem Diagramas de Voronoi diferentes.

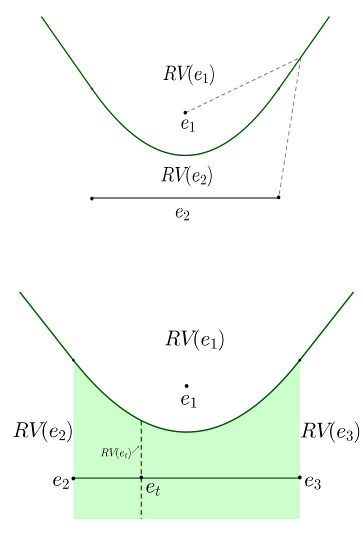

Figura 1: Diagrama de Voronoi.

Dado o diagrama de Voronoi $\mathcal{DV}(P)$ de um conjunto de pontos $P \in \mathbb{R}^n$ podemos definir o *dual* de $\mathcal{DV}(P)$ como sendo a estrutura obtida a partir de $\mathcal{DV}(P)$ ligando os pontos de P que compartilham de uma mesma aresta.

Dado um conjunto de pontos $P \in \mathbb{R}^n$ (não todos colineares) definimos a *triangulação de Delaunay*, denotada por $\mathcal{TD}(P)$, como sendo o dual de $\mathcal{DV}(P)$. A triangulação de Delaunay é a "melhor triangulação" de um conjunto de pontos[2]. A unicidade é garantida observando-se algumas restrições, por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ é necessário que não haja em P quatro pontos em uma mesma circunferência.

Outra estrutura geométrica bastante conhecida é o eixo medial. O eixo medial é em geral definido a partir de bolas maximais. Considere S uma curva fechada em $\mathbb{R}^n$. Uma bola aberta interior a S que não está contida em nenhuma outra bola aberta interna à S é chamada de

[1] site: um objeto geométrico contido no seu conjunto

[2] A Triangulação de Delaunay maximiza o menor ângulo de todos os triângulos na triangulação; esta tende a evitar triângulos com ângulos internos muito pequenos.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0120

bola maximal. O *eixo medial* é definido como o lugar geométrico dos centros de todas as suas bolas maximais. Para tal definição é necessário que o interior de S esteja bem definido, excluindo assim a possibilidade de aplicação a objetos discretos e curvas abertas ou com auto-interseção.

Neste trabalho, estudamos uma relação entre o diagrama de Voronoi e o eixo medial de tal forma a obter o eixo medial a partir do diagrama de Voronoi de maneira semelhante a construção da triangulação de Delaunay. Apresentamos pequenas modificações nas definições de ambos os conceitos, mantendo as boas propriedades já existentes das definições clássicas. Estendemos o diagrama de Voronoi a objetos contínuos, tais como curvas abertas, fechadas e com auto-interseção, e em contra partida estendemos o conceito de eixo medial a objetos discretos e curvas abertas e com auto-interseção.

Como já ilustrado na figura anterior, considerando um segmento de reta AB qualquer em $\mathbb{R}^2$ como sendo um conjunto infinito de pontos, a região de Voronoi de um ponto $e \in AB$ será a reta normal a AB que passa por e. Mas, se considerarmos AB como sendo um único site, então tais retas não farão parte do diagrama de Voronoi. A definição clássica de região de Voronoi não nos permite a aplicação do diagrama de Voronoi a objetos contínuos. Por outro lado, para o eixo medial a definição clássica nem se aplica a objetos discretos devido a definição de bola maximal.

A seguir, dado $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de sites, definimos tais conceitos geométricos tornando possível obter o diagrama de Voronoi de forma consistente para objetos contínuos e, da mesma forma, o eixo medial para objetos discretos. Além disso, obtemos uma relação entre os conceitos apresentados.

A região de Voronoi de um site $e \in E$, é o conjunto de pontos *estritamente* mais próximos a e que qualquer outro site em E. A partir daí, definimos o diagrama de Voronoi como sendo todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ que não pertencem à nenhuma das regiões de Voronoi.

Uma bola aberta B é dita maximal se B não possui nenhum ponto de E e B não está contida propriamente em nenhuma outra bola aberta com esta propriedade, não sendo mais necessário que E tenha seu interior definido. O eixo medial é o lugar geométrico dos centros de todas bolas maximais cuja fronteira tem mais que dois pontos de interseção com S.

Temos agora definido dois conceitos que atuam sobre o mesmo objeto cuja a relação é apresentada neste trabalho de forma natural a partir das definições. Para formalizar e identificar sob quais condições estes dois conceitos são relacionados, dois principais resultados são demonstrados neste trabalho.

A Figura 2 ilustra o diagrama de Voronoi para conjuntos discretos de pontos sobre um retângulo. Em verde, destaca-se o eixo medial do retângulo (contínuo). Na esquerda, notamos que os centros das bolas maximais coincidem com os pontos que estão sobre o diagrama de Voronoi, e na direita observamos que ao aumentar a quantidade de pontos discretos sobre o retângulo, parte do diagrama de Voronoi se aproxima do eixo medial do retângulo, sendo esse mais um importante resultado obtido neste trabalho.

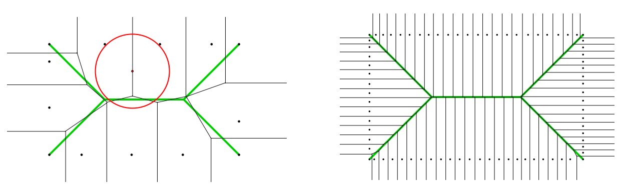

Figura 2: Diagrama de Voronoi e Eixo Medial.

Palavras-chave: *Geometria Computacional, Diagrama Voronoi, Eixo Medial.*

Referências

[1] J.o'Rourke. Computational geometry in C. Cambridge university press, 1994.

[2] L.H.Figueiredo, e P.C.Carvalho. Introdução a geometria computacional. 18º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA. 1991.

[3] M. De Berg, M. Van Kreveld, M. Overmars, O. Scwarzkopf, Computational geometry. Springer 1997.

[4] R. Fabri, L.F.Estrozi e L.F.Costa. On Voronoi Diagrams and Medial Axes. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2002,17(1), 27-40.

