Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Exponencial e a Dinâmica de Populações

Priscila Oliveira Pereira[1]
IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Patrícia Nunes da Silva[2]
PPG Ciências Computacionais e Modelagem Matemática, IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

O estudo da dinâmica de populações ilustra a estreita relação entre matemática e biologia. Neste trabalho, estamos interessados em observar a presença da função de probabilidade exponencial em modelos de dinâmica de populações. Vamos explorar dois cenários: a Equação Fundamental de Equilíbrio da Dinâmica e os modelos compartimentais do tipo SIR. Além disso, vamos mostrar que se uma função de probabilidade não tem memória, ela é exponencial.

Thieme [2] nos diz que, na natureza, a dinâmica de uma espécie dificilmente pode ser isolada da de outras espécies. No entanto, no espírito de dividir para conquistar, a modelagem matemática concentra-se primeiro em uma população e expressa sua variação em termos de conceitos como taxas de natalidade, taxas de mortalidade e taxas de emigração e imigração. Isso nos leva à chamada Equação Fundamental de Equilíbrio da Dinâmica Populacional:

$$N'(t) = B(t) - D(t) + I(t) - E(t), \tag{1}$$

onde $B(t), D(t), I(t)$ e $E(t)$ denotam respectivamente a quantidade de nascimentos, mortes, imigrantes e emigrantes por unidade de tempo t. Essa equação expressa a variação da população $N(t)$ em termos desses fatores. Um dos desafios é encontrar expressões para esses fatores.

A taxa de variação das mortes também pode ser expressa como uma taxa per capita. A taxa per capita de mortalidade, $\mu(t)$, é o número médio de mortes por cada indivíduo por unidade de tempo, no instante t. Com ela, podemos calcular $D(t)$ multiplicando $\mu(t)$ por $N(t)$, o tamanho da população no instante t. Para determinar $\mu(t)$, seguiremos a abordagem de Thieme [2]. Considere $\mathcal{F}(t)$, a função de probabilidade de ainda estar vivo no tempo t. Seja $\Pi(t, r)$, $t \geq r$, a função de probabilidade de ainda estar vivo no tempo t, dado que se está vivo no tempo r. Isto é, para $t = r + h$, $\Pi(t, r) = \mathcal{F}(h|r) = \dfrac{\mathcal{F}(t)}{\mathcal{F}(r)}$. Temos $\Pi(r, r) = 1$ e $0 \leq \Pi(t, r) \leq 1$. A probabilidade de morrer entre os instantes r e t é dada por $1 - \Pi(t, r)$. Assim, a taxa de mortalidade per capita $\mu(t)$ é definida como:

$$\mu(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \Pi(t + h, t)}{h}, \tag{2}$$

supondo que esses limites existam.

De $\Pi(t, r) = \Pi(t, s)\Pi(s, r)$, para $t \geq s \geq r$, segue que

$$\frac{d}{dt}\Pi(t, r) = -\mu(t)\Pi(t, r), \qquad \Pi(r, r) = 1. \tag{3}$$

Logo

$$\Pi(r + h, r) \stackrel{t=r+h}{=} \Pi(t, r) = \exp\left(-\int_r^t \mu(s)ds\right) = \exp\left(-\int_0^h \mu(u - r)du\right). \tag{4}$$

[1]priscila.poliveira@yahoo.com.br
[2]nunes@ime.uerj.br

Se μ é constante, vemos que $\Pi(r+h,r)$ é exponencial com média μ. Além disso, ela não tem memória. Isto é, $\Pi(r+h,r) = \Pi(h,0)$. Em termos de $\mathcal{F}$, temos $\mathcal{F}(h|r) = \mathcal{F}(h)$. Ou ainda, $\mathcal{F}(r+h) = \mathcal{F}(r)\mathcal{F}(h)$. Estamos interessados em investigar a recíproca, se $\mathcal{F}(t)$ não tem memória. Isto é se $\mathcal{F}(r+h) = \mathcal{F}(r)\mathcal{F}(h)$, podemos deduzir que $\mathcal{F}$ é exponencial? Para responder a essa pergunta, vamos resolver um projeto proposto por Bartle [1, Capítulo 4]. Ele considera g uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, não identicamente zero, e que satisfaz a equação funcional

$$g(x+y) = g(x)g(y); \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Ele propõe uma sequência de passos para deduzirmos que g é uma "exponencial".

No contexto de epidemiologia, reencontramos a exponencial nos modelos compartimentais do tipo SIR. Em um modelo SIR, a população é dividida nos compartimentos de Suscetíveis (S), Infectados (I) e Recuperados (R). Vamos considerar o modelo sem fatores demográficos em que a taxa de infecção é σ e a de recuperação é ρ:

$$\begin{cases} S' = -\sigma S I \\ I' = \sigma S I - \rho I \\ R' = \rho I \end{cases} . \tag{6}$$

Ao fazermos uma mudança de variável para adimensionalizar o sistema (6), consideramos

$$x = \frac{\sigma}{\rho} S, \quad y = \frac{\sigma}{\rho} I, \quad z = \frac{\sigma}{\rho} R \tag{7}$$

e

$$\tau = \rho t. \tag{8}$$

Para voltarmos à variável temporal original, precisamos multiplicar τ pelo fator $\frac{1}{\rho}$. Veremos que esta fração tem significado epidemiológico. Vamos mostrar que neste modelo, há uma hipótese implícita sobre a duração do período infeccioso. Veremos que a probabilidade de ainda estar infectado após um intervalo de tempo t é exponencial e vamos investigar o que isso nos diz sobre o tempo médio de infecção.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPERJ, Processo E-26/010/101140/2018 e do Programa PIBIC-UERJ.

Referências

[1] R.G. Bartle. **Elementos de análise real**. Campus, 1983.

[2] H. R. Thieme. **Mathematics in Population Biology**. Princeton series in theoretical and computational biology. Princeton University Press, 2003.

